AGRUPAMENTO DE ESCOLAS JOSÉ BELCHIOR VIEGAS

ESCOLA SECUNDÁRIA JOSÉ BELCHIOR VIEGAS

Ano Letivo 2011/2012

Grupo 500 – Matemática

Plano de Aula

Unidade Didática: Geometria no plano e no espaço I

Data: 17/11/2011	**Disciplina:** Matemática A	**Ano:** 10º
Aula n.º: 26		**Tema:** Geometria Analítica

Objetivos /Competências:	• Calcular a distância entre dois pontos no espaço. • Indicar coordenadas de pontos no espaço. • Representar condições no plano e no espaço. • Aplicar conhecimentos anteriores, tais como, cálculo de áreas, perímetros e desenho de secções.
Sumário:	• Continuação do sumário da aula anterior. • Resolução de exercícios.
Estratégias e Atividades:	• Iniciar a aula com o sumário. • Explicar a fórmula da distância entre dois pontos no espaço fazendo analogia à fórmula para calcular distâncias entre dois pontos no plano e usando o esquema do prisma da página 122 que deverá estar exposto no quadro interativo. • Propor aos alunos a resolução do exercício 70 da página 122 e corrigir no quadro com a ajuda dos alunos. Durante a resolução do exercício o professor deverá circular pela sala de forma a ajudar os alunos a resolverem o exercício. • De forma a verificar as aprendizagens das aulas anteriores, resolver o exercício 20 da página 22 do Caderno Prático com os alunos no quadro e propor a resolução da Proposta 8 da página 182. Durante a resolução da proposta o professor deverá circular pela sala de forma a ajudar os alunos a resolverem o exercício. • Propor um exercício elaborado adaptado de um exercício da página do GAVE, para os alunos resolverem. O exercício deverá ser exposto no quadro interativo. • No decorrer da aula questionar sempre os alunos de forma a verificar se estes têm alguma dúvida sobre alguma parte da matéria ou exercício que se esteja a resolver.
Materiais e Recursos:	• Quadro, quadro interativo, computador e manual adotado.
Expectativas:	• Com a resolução dos exercícios propostos e a formulação de perguntas aos alunos durante a aula, pretende-se que os alunos consigam calcular a distância entre dois pontos no espaço, indicar coordenadas de pontos no espaço, representar condições no plano e no espaço e aplicar conhecimentos anteriores, tais como, cálculo de áreas, perímetros e desenho de secções.
Observações:	• Caso não seja possível resolver todos os exercícios, os exercícios que restarem serão propostos para trabalho de casa.

Planificação da aula 26 – 17/11/2011

→ A aula inicia-se com o sumário: continuação da aula anterior; resolução de exercícios.

→ Mostrar no quadro interativo a figura seguinte para explicar como surge a Fórmula da distância entre dois pontos no espaço.

Como se calcula a distância entre dois pontos no plano?

Como acham que será no espaço?

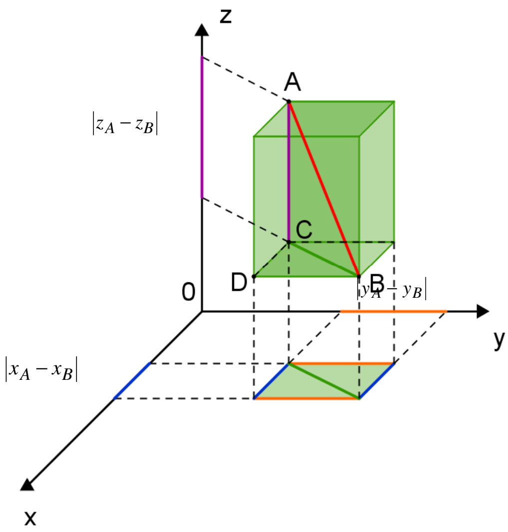

Figura 1: Ilustração sobre a distância entre dois pontos no espaço.

→ Explicar que a distância entre dois pontos é a raiz da soma dos quadrados das diferenças das respetivas coordenadas.

→ Escrever no quadro:

Distância entre dois pontos no espaço: Em relação a um referencial o.m.*Oxyz*, dados dois pontos A(x_A,y_A,z_A) e B(x_B,y_B,z_B), a distância entre eles é dada por:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}\,.$$

→ Propor aos alunos a resolução do exercício 70 da página 122 e pedir para calcularem a área total do tetraedro. Entretanto, perguntar aos alunos:

As faces do tetraedro são que tipo de figuras geométricas? "Triângulos equiláteros!" E já agora, quantos são? "4" Se alguém tiver dúvidas, a planificação do tetraedro está na página 39 do manual.

→ Exercício 70 da página 122[1]

$$\overline{AD} = \sqrt{(5-8)^2 + (-2-2)^2 + (1-13)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-12)^2} =$$

$$= \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$$

[1] Todos os exercícios assinalados são referentes ao manual adotado: Costa, B., & Rodrigues, E. (2010). *Novo espaço - Matemática A 10.º ano*. Porto: Porto Editora.

$P = 3\times l = 3\times 13 = 39$

$A_{total} = 4\times A_{triângulo}$

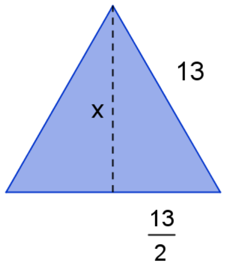

Figura 2: Figura geométrica de uma das faces do tetraedro.

$$h^2 = c_1{}^2 + c_2{}^2 \Leftrightarrow 13^2 = x^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 13^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 169 - \frac{169}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{676-169}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{507}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{507}{4}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{507}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{507}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r|l} 507 & 3 \\ 169 & 13 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$507 = 13^2 \times 3$

$$A_{triângulo} = \frac{b\times h}{2} = \frac{13\times\frac{13\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{13^2\sqrt{3}}{4} = \frac{169\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{total} = 4\times\frac{169\sqrt{3}}{4} = 169\sqrt{3}$$

Dúvidas?

Agora vamos resolver em conjunto o exercício 20 da página 22 do Caderno Prático[2], de forma a relembrar condições no espaço.

→ Exercício 20 da página 22 do caderno prático

→ Colocar a figura do exercício no quadro interativo e escrever as coordenadas dadas no enunciado junto aos pontos.

20.1 $C(8,-4,-2)$

→ Para explicar as coordenadas do ponto C, por exemplo, referir que as coordenadas em x e em z são as mesmas que o ponto J e que a coordenada em y é a mesma que a do ponto A; ou então podemos andar com a caneta sobre as arestas, começando em x, depois em y e por fim, em z.

$G(8,0,2)$, $L(0,4,-2)$

[2] Parte integral do manual adotado pela disciplina.

20.2

20.2.1 $[ABCD]$ Este plano é paralelo ao plano *xOz*, que é o plano coordenado definido por $y = 0$. Vamos ter o plano $y = -4$.

20.2.2 $[MJLN]$ Este plano é paralelo ao plano *xOz*, que é o plano coordenado definido por $y = 0$. Vamos ter o plano $y = 4$.

20.2.3 $[BCJMPG]$ Este plano é paralelo ao plano *yOz*, que é o plano coordenado definido por $x = 0$. Vamos ter o plano $x = 8$.

20.3

Notem que as arestas não são retas porque são limitadas.

20.3.1 Se definirmos a reta temos:

$$z = 2 \wedge y = 0.$$

Mas, a aresta é limitada por G e F, ou seja, pelos planos das faces BCGH e ADFE, ou seja, o *x* está entre 0 e 8. Assim temos:

$$z = 2 \wedge y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 8$$

Dúvidas?

20.3.2 Então e agora? A reta é?

$$y = -4 \wedge x = 8$$

E os valores de *z* estão entre? "–2 e 2". Então temos:

$$y = -4 \wedge x = 8 \wedge -2 \leq z \leq 2$$

Dúvidas?

20.3.3 Então e agora? A reta é?

$$z = 2 \wedge x = 8$$

E os valores de *y* estão entre? "–4 e 0". Então temos:

$$z = 2 \wedge x = 8 \wedge -4 \leq y \leq 0$$

Dúvidas?

20.3.4 Então e agora? A reta é?

$$y = 4 \wedge x = 8$$

E os valores de *z* estão entre? "–2 e 0". Então temos:

$$y = 4 \wedge x = 8 \wedge -2 \leq z \leq 0$$

Dúvidas? Então vamos aproveitar para lembrar as condições no plano. Vamos fazer a Proposta 8 da página 182. Fazemos o primeiro ponto em conjunto e depois fazem os outros

→ Os restantes exercícios são para os alunos resolverem, enquanto vou esclarecendo dúvidas nos lugares.

→ Proposta 8 da página 182

1. Neste caso temos quantos conjuntos? “1” E está limitado por quantas fronteiras? “2” Então vamos ter uma interseção de duas condições!

$$y \geq 2 \wedge x \geq -2$$

2. 3 fronteiras (1 conjunto): $(\quad \wedge \quad \wedge \quad)$

$$y \leq 3 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq x$$

3. 2 conjuntos (4 fronteiras e 3 fronteiras): $(\quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad) \vee (\quad \wedge \quad \wedge \quad)$

$(y \leq 2 \wedge y \geq -2 \wedge x \geq -2 \wedge x \leq 0) \vee (y \leq x \wedge y \geq -x \wedge x \leq 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2 \leq y \leq 2 \wedge -2 \leq x \leq 0) \vee (y \leq x \wedge y \geq -x \wedge x \leq 2)$

ou

$\Leftrightarrow (|y| \leq 2 \wedge |x+1| \leq 1) \vee (|y| \leq x \wedge x \leq 2)$

4. 2 conjuntos (3 fronteiras e 3 fronteiras): $(\quad \wedge \quad \wedge \quad) \vee (\quad \wedge \quad \wedge \quad)$

$(x \geq 0 \wedge x \leq 3 \wedge y \geq 2) \vee (x \geq 0 \wedge x \leq 3 \wedge y \leq 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0 \leq x \leq 3 \wedge y \geq 2) \vee (0 \leq x \leq 3 \wedge y \leq 1)$

5. $y = -x \wedge -1 \leq x < 2$ ou $y = -x \wedge -2 < y \leq 1$

6. 1 conjunto (2 fronteiras): $(\quad \wedge \quad)$

$r^2 = 4^2 + 1^2 \Leftrightarrow r^2 = 17 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{17} \Rightarrow r = \sqrt{17}$

$$-1 < y \leq \sqrt{17}$$

→ Colocar o seguinte exercício no quadro interativo para os alunos resolverem.

Exercício a propor aos alunos[3]:

Na figura está representado um sólido que se pode decompor no cubo [DEFGHIKL] e no paralelepípedo retângulo [HIJMNOPQ]. Sabe-se que:

- $\overline{HN} = \overline{DH}$;
- o volume do paralelepípedo é igual a $\frac{5}{8}$ do volume do cubo;
- o ponto B é o ponto médio da aresta [MJ].
- $\overline{DG} = 8$ e que $\overline{AG} = 1$.

a) Indique as coordenadas dos pontos.

[3] adaptado do exercício 9 presente na página http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=272&fileName=Itens_Mat_A_10ano_Conjunto1.pdf

b) Determine $\overline{AB}$.

c) Represente a secção produzida no sólido pelo plano BKF e calcule a sua área.

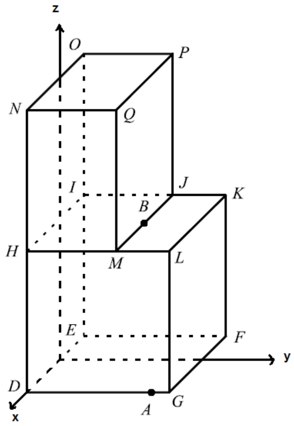

Figura 3: Sólido do exercício presente no final da aula 26.

→ Resolução

$$V_{cubo} = l^3 = 8^3 = 512$$

a) $V_{paral} = \frac{5}{8}V_{cubo} = \frac{5\times 512}{8} = 320$

$$V_{paral} = 8^2 \times \overline{HM} \Leftrightarrow \overline{HM} = \frac{320}{8^2} \Leftrightarrow \overline{HM} = \frac{320}{64} \Leftrightarrow \overline{HM} = 5$$

$A(4,7,0)$ $B(0,5,8)$ $D(4,0,0)$ $E(-4,0,0)$ $F(-4,8,0)$ $G(4,8,0)$

$H(4,0,8)$ $I(-4,0,8)$ $J(-4,5,8)$ $K(-4,8,8)$ $L(4,8,8)$ $M(4,5,8)$

$N(4,0,16)$ $O(-4,0,16)$ $P(-4,5,16)$ $Q(4,5,16)$

b)

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (7-5)^2 + (0-8)^2} =$$
$$= \sqrt{4^2 + 2^2 + (-8)^2} =$$
$$= \sqrt{16+4+64} =$$
$$= \sqrt{84} =$$
$$= 2\sqrt{21}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 21$$

c)

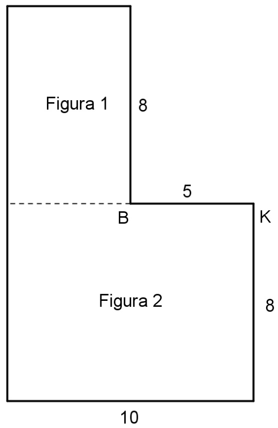

Figura 4: Ilustração das áreas a calcular do exercício.

$$\overline{BK} = \sqrt{(0+4)^2 + (5-8)^2 + (8-8)^2} =$$
$$= \sqrt{4^2 + 3^2 + 0} =$$
$$= \sqrt{25} =$$
$$= 5$$
$$A_{fig1} = 8 \times 5 = 40$$
$$A_{fig2} = 10 \times 8 = 80$$
$$A_{total} = A_{fig1} + A_{fig2} = 40 + 80 = 120$$

Reflexão Critica

Esta aula era constituída por muito pouco matéria teórica, tendo sido lecionada apenas a distância entre dois pontos no espaço. De qualquer forma a resolução de exercícios pressupunha a utilização de muitos conhecimentos adquiridos em aulas anteriores, assim, a primeira parte da aula referente ao espaço correu muito bem mas, na segunda referente às condições no plano os alunos revelaram algumas dificuldades. Na verdade, as condições não tinham sido ainda muito trabalhadas com os alunos e alguns pareciam mesmo não ter entendido da primeira vez. De qualquer forma, foi bom para esclarecer dúvidas e, uma vez que os alunos é que iam corrigir ao quadro os exercícios, fiquei com tempo para circular na sala e esclarecer dúvidas.

Mais uma vez, os alunos foram bastante participativos, sempre a querer responder às questões que ia colocando ao longo da aula.

O facto de resolver alguns exercícios em conjunto com os alunos no quadro também pareceu ser bastante benéfico porque implicava mais discussão de resultados e assim, mais esclarecimento da matéria.

Uma vez que os alunos apresentaram muitas dúvidas nas condições no plano, achei por bem prolongar a resolução dos exercícios sobre esta matéria para dar mais tempo aos alunos para pensarem e esclarecer dúvidas, assim o exercício adaptado da página do GAVE não chegou a ser resolvido! Apesar do prolongamento de tempo para a resolução dos exercícios de condições no plano, fiquei a pensar que não tinha sido suficiente para esclarecer todas as dúvidas e o orientador cooperante também o achou. Para que os alunos pudessem praticar mais, foi-lhes colocada uma ficha no Moodle[4] com exercícios sobre o tema.

De qualquer forma acho que esta aula também correu muito bem.

[4] Plataforma online escolar, através da qual os professores podem comunicar com os alunos, receber trabalhos, fazer testes, e entre outras coisas, disponibilizar fichas de trabalho para os alunos resolverem.