

2012
ENCONTRO
NACIONAL
SPM

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

9, 10 e 11 de JULHO, UNIVERSIDADE DO ALGARVE

Ensinando métodos de representação proporcional

Susana Fernandes

FCT - Universidade do Algarve

ORGANIZAÇÃO



Delineamento da apresentação

- O problema da representação proporcional
- A representação proporcional em MACS
- Método de Hamilton:
 - Paradoxos

Delineamento da apresentação

- Métodos de divisores modificados nos EUA
 - Exercício de aplicação do método de Jefferson
- Métodos de divisores modificados na Europa
 - Exercício de aplicação do método de D'Hondt
- Jefferson vs D'Hondt



O problema da representação proporcional

- Nos Estados Unidos da América cada estado recebe um número de lugares no parlamento - “house of representatives” – proporcional à sua população, segundo o último censo realizado.
- Em inúmeros países da Europa, Portugal incluído, numa eleição cada lista eleitoral recebe um número de mandatos no parlamento proporcional ao número de votos obtidos nas eleições.

O problema da representação proporcional

- V – nº de votos válidos de uma eleição
- N – nº de listas eleitorais
- v_i – nº de votos na lista eleitoral i
- M – nº total de mandatos a distribuir pelas listas
- m_i – nº de mandatos a atribuir a cada lista eleitoral i



2012

ENCONTRO
NACIONAL
SPM

O problema da representação proporcional

- v_i/V – proporção de votos na lista eleitoral i
- $q_i = M \cdot v_i/V$ – quota de mandatos da lista i no parlamento
- $D = V/M$ – divisor – nº de eleitores representados por mandato
- M/V – proporção de mandatos por eleitor (representação per capita)

O problema da representação proporcional

- Exemplo: $M=26$; $N=5$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
votos	9061	7179	5259	3319	1182	26000
quotas	9.061	7.179	5.259	3.319	1.182	26
quotas arredondadas	9	7	5	3	1	25

adaptado de [2]

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt



A representação proporcional em MACS

- Método de Hamilton
- Métodos de divisores modificados nos EUA:
 - Jefferson, Adams, Webster, Huntington-Hill
- Métodos de divisores modificados na Europa:
 - D'Hondt, Sainte-Laguë

Método de Hamilton

- Calcular a quota de cada lista eleitoral ($q_i = v_i / D$).
- Atribuir a cada lista um número de mandatos igual à sua quota mínima ($m_i = \lfloor q_i \rfloor$).
- Se sobrarem mandatos por atribuir, adicionar um mandato por lista, por ordem decrescente da parte decimal da sua quota, até completar o total de mandatos a distribuir.

Método de Hamilton

- Exemplo: $M=26$; $N=5$; $V=26000$; $D=V/M=1000$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i	9.061	7.179	5.259	3.319	1.182	26
$\lfloor q_i \rfloor$	9	7	5	3	1	25
m_i	9	7	5	3+1=4	1	25+1

Método de Hamilton: Paradoxo de Alabama

- $M=27$; $D=26000/27 = 962.(962)$

	Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
M=26	$q_{i(26)}$	9.061	7.179	5.259	3.319	1.182	26
	$m_{i(26)}$	9	7	5	3+1=4	1	25+1
M=27	$q_{i(27)}$	9.410	7.455	5.461	3.447	1.227	27
	$m_{i(27)}$	9	7+1=8	5+1=6	3	1	25+2

Método de Hamilton: Paradoxo de Alabama

	Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
M=26	$q_{i(26)}$	9.061	7.179	5.259	3.319	1.182	26
	$m_{i(26)}$	9	7	5	3+1=4	1	25+1
M=27	$q_{i(27)}$	9.410	7.455	5.461	3.447	1.227	27
	$m_{i(27)}$	9	7+1=8	5+1=6	3	1	25+2

Método de Hamilton: Paradoxo de Alabama

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
$q_{i(26)}$	9.061	7.179	5.259	3.319	1.182	26
$q_{i(27)}$	9.410	7.455	5.461	3.447	1.227	27
% de aumento	4%	4%	4%	4%	4%	4%
aumento absoluto	0.349	0.276	0.202	0.128	0.045	1

Método de Hamilton: Paradoxo da população

- M=27: eleições anteriores e novas eleições

	Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
eleições anteriores	v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
	q_i	9.410	7.455	5.461	3.447	1.227	27
	m_i	9	7+1=8	5+1=6	3	1	25+2
novas eleições	$v_{i(novo)}$	9968	7897	6048	3618	1359	28890
	$q_{i(novo)}$	9.316	7.380	5.652	3.381	1.270	27
	$m_{i(novo)}$	9	7	5+1=6	3+1=4	1	25+2
% de crescimento de v_i		10%	10%	15%	9%	15%	11%

Método de Hamilton: Paradoxo da população

- M=27: eleições anteriores e novas eleições

	Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
eleições anteriores	v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
	q_i	9.410	7.455	5.461	3.447	1.227	27
	m_i	9	7+1=8	5+1=6	3	1	25+2
novas eleições	$v_{i(novo)}$	9968	7897	6048	3618	1359	28890
	$q_{i(novo)}$	9.316	7.380	5.652	3.381	1.270	27
	$m_{i(novo)}$	9	7	5+1=6	3+1=4	1	25+2
% de crescimento de v_i		10%	10%	15%	9%	15%	11%



Método de Hamilton: Paradoxo da população

- M=27: eleições anteriores e novas eleições

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
% de crescimento de v_i	10%	10%	15%	9%	15%	11%
v_i/V	0.3485	0.2761	0.2022	0.1277	0.0455	1
$v_{i(\text{nov})}/V_{\text{nov}}$	0.3450	0.2733	0.2093	0.1252	0.0470	1
$q_{i-\text{nov}}/q_i$	0.99	0.99	1.03	0.98	1.03	
$q_{i-\text{nov}} - q_i =$ $M \times v_{i(\text{nov})}/V_{\text{nov}} - M \times v_i/V$	-0.094	-0.075	+0.191	-0.065	+0.043	

Método de Hamilton: Paradoxo dos novos estados

- Nova lista F com 1200 votos. Acrescentar o mandato que lhe corresponde aos 27 já atribuídos

	Listas eleit.	A	B	C	D	E	F	total
M=27	v_i	9061	7179	5259	3319	1182	-	26000
	q_i	9.410	7.455	5.461	3.447	1.227	-	27
	m_i	9	7+1=8	5+1=6	3	1	-	25+2
M=27+1	v_i	9061	7179	5259	3319	1182	1200	27200
	$q_{i(\text{nov})}$	8.994	7.126	5.220	3.295	1.173	1.191	28
	$m_{i(\text{nov})}$	8+1=9	7	5+1=6	3+1=4	1	1	25+3

Método de Hamilton: Paradoxo dos novos estados

- Nova lista F com 1200 votos. Acrescentar o mandato que lhe corresponde aos 27 já atribuídos

	Listas eleit.	A	B	C	D	E	F	total
M=27	v_i	9061	7179	5259	3319	1182	-	26000
	q_i	9.410	7.455	5.461	3.447	1.227	-	27
	m_i	9	7+1=8	5+1=6	3	1	-	25+2
M=27+1	v_i	9061	7179	5259	3319	1182	1200	27200
	$q_{i(novo)}$	8.994	7.126	5.220	3.295	1.173	1.191	28
	$m_{i(novo)}$	8+1=9	7	5+1=6	3+1=4	1	1	25+3

Método de Hamilton: Paradoxo dos novos estados

- Nova lista F com 1200 votos. Acrescentar o mandato que lhe corresponde aos 27 já atribuídos

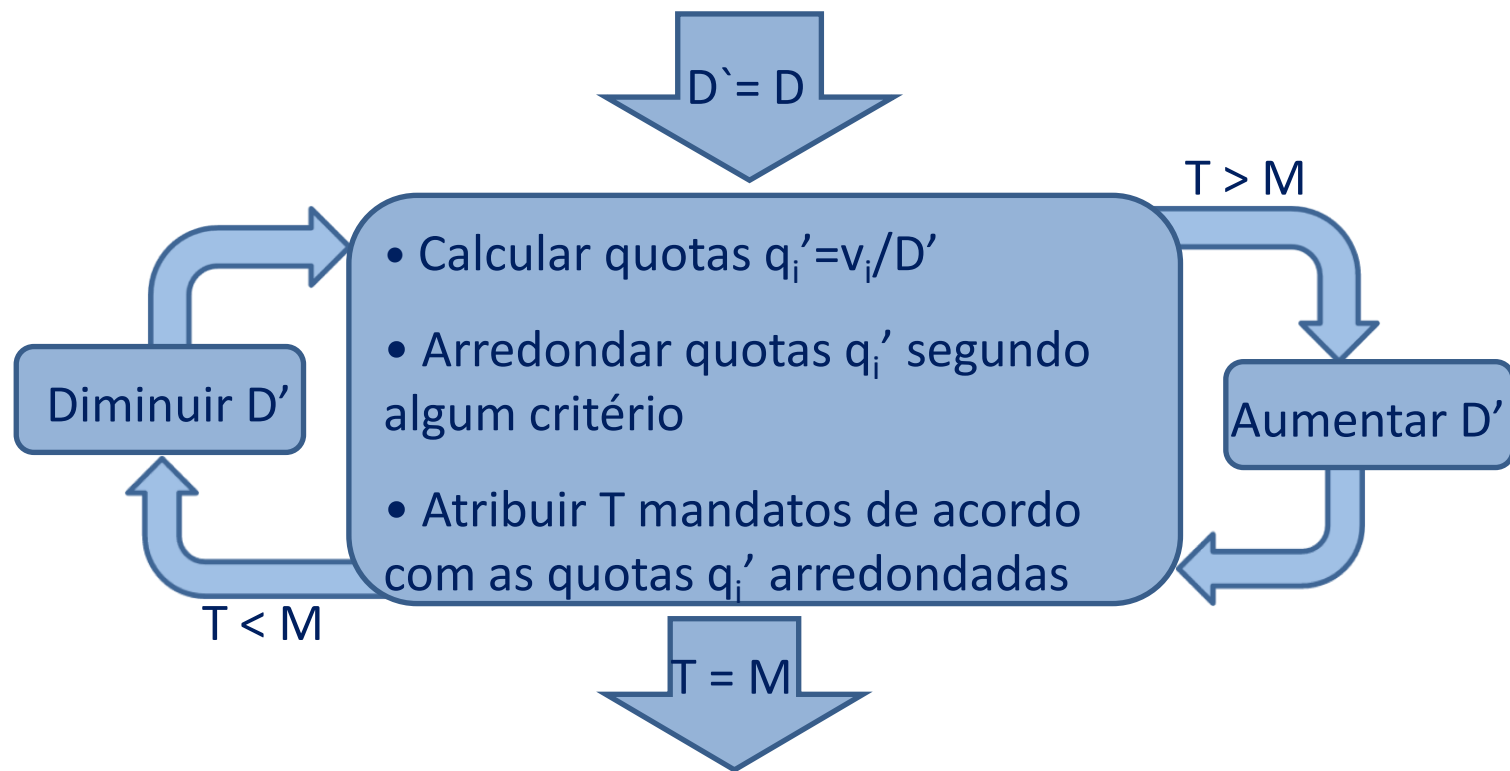
Listas eleit.	A	B	C	D	E	F	total
q_i	9.410	7.455	5.461	3.447	1.227	-	27
$q_{i(\text{nov})}$	8.994	7.126	5.220	3.295	1.173	1.191	28
$q_{i(\text{nov})}/q_i$	0.956	0.956	0.956	0.956	0.956	-	
$q_{i(\text{nov})}-q_i$	-.415	-.329	-.241	-.152	-.054	-	



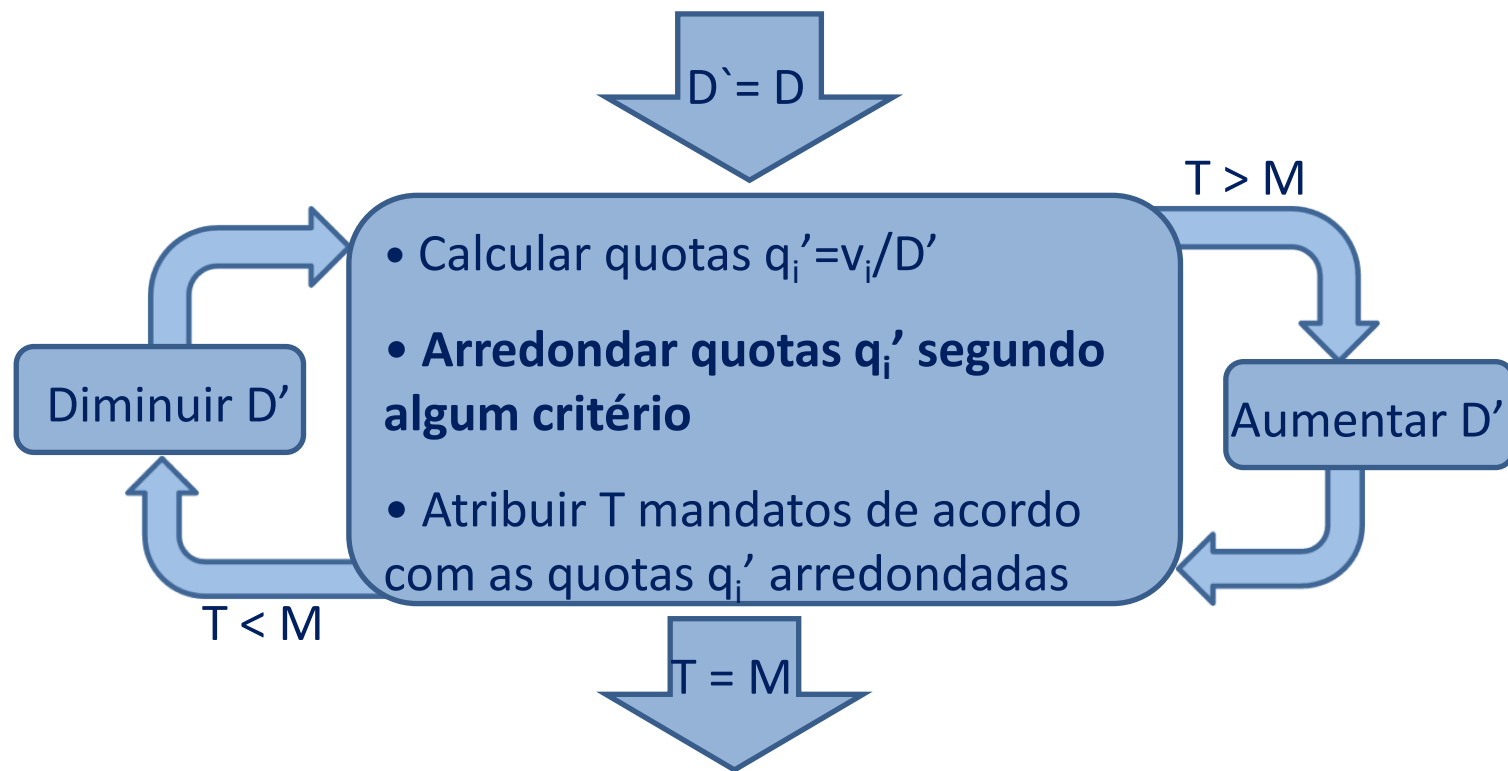
Método de Hamilton: proporcional?

- A variação das quotas em igual proporção não corresponde a variações iguais em termos absolutos.
- Às quotas maiores corresponderá uma maior variação absoluta.
- Ao atribuir os mandatos extra pela parte decimal da quota desvia-se do princípio de proporcionalidade.

Métodos de divisores modificados nos EUA



Métodos de divisores modificados nos EUA



Métodos de divisores modificados nos EUA

- $d(q_i')$ – ponto de arredondamento de q_i'

$$\lfloor q_i' \rfloor \leq d(q_i') \leq \lceil q_i' \rceil$$

- Se $q_i' < d(q_i')$ então $m_i = \lfloor q_i' \rfloor$
- Se $q_i' > d(q_i')$ então $m_i = \lceil q_i' \rceil$

Métodos de divisores modificados nos EUA

Métodos de divisores	Pontos de arredondamento $d(q_i')$	$q_i' < d(q_i') \Rightarrow m_i = \lfloor q_i' \rfloor$
Adams	$\lfloor q_i' \rfloor$	por excesso
Dean	$2 \lfloor q_i' \rfloor \lceil q_i' \rceil / (\lfloor q_i' \rfloor + \lceil q_i' \rceil)$	média harmónica
Huntington-Hill	$\sqrt{\lfloor q_i' \rfloor \lceil q_i' \rceil}$	média geométrica
Webster	$(\lfloor q_i' \rfloor + \lceil q_i' \rceil) / 2$	média aritmética
Jefferson	$\lceil q_i' \rceil$	por defeito

Métodos de divisores modificados nos EUA

Métodos de divisores	Pontos de arredondamento $d(q_i')$	$q_i' < d(q_i') \Rightarrow m_i = \lfloor q_i' \rfloor$
Adams	$\lfloor q_i' \rfloor$	por excesso
Dean	$2 \lfloor q_i' \rfloor \lceil q_i' \rceil / (\lfloor q_i' \rfloor + \lceil q_i' \rceil)$	média harmónica
Huntington-Hill	$\sqrt{\lfloor q_i' \rfloor \lceil q_i' \rceil}$	média geométrica
Webster	$(\lfloor q_i' \rfloor + \lceil q_i' \rceil) / 2$	média aritmética
Jefferson	$\lceil q_i' \rceil$	por defeito

Método de Jefferson

- $M = 26$; $D = V/M = 1000$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i	9.061	7.179	5.259	3.319	1.182	26
$m_i = \lfloor q_i \rfloor$	9	7	5	3	1	25

$$q_i < \lceil q_i \rceil \Rightarrow m_i = \lfloor q_i \rfloor$$

$25 < M \Rightarrow$ Diminuir D

Método de Jefferson

- $M = 26$; $D' = 906.1$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	10	7.923	5.804	3.663	1.305	26
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	10	7	5	3	1	26



Método de divisores modificados na Europa

- Vão atribuindo um mandato de cada vez até completar todo o parlamento
- A cada iteração é atribuído 1 mandato à lista eleitoral a que corresponde o maior rácio

$$v_i / d(m_i)$$

$$m_i = 0, \dots, M-1; \quad i = 1, \dots, N$$

- $d(m_i)$ – sequência de divisores

Método de divisores modificados na Europa

- (i) $m_i = 0, i=1, \dots, N$
- (ii) Repetir até que $\sum m_i = M$

Seja k tal que

$$v_k / d(m_k) = \max v_i / d(m_i)$$

Fazer $m_k = m_k + 1$ e $m_i = m_i, \forall i \neq k$

Método de divisores modificados na Europa

Método de	Divisores $d(m_i)$	Sequência de divisores $d(m_i)$ $m_i=0,\dots,M-1$
D'Hondt	$m_i + 1$	1, 2, 3, ...
Sainte-Laguë	$m_i + \frac{1}{2}$	$1/2, 3/2, 5/2, \dots$ $= 1, 3, 5, \dots$

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	9061	7179	5259	3319	1182
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	0	0	0	0	0

$$\sum m_i = 0$$

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	9061	7179	5259	3319	1182
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	0	0	0	0

$$\sum m_i = 1$$

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	9061	7179	5259	3319	1182
2	4530.5				
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	0	0	0	0

$$\sum m_i = 1$$

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	9061	7179	5259	3319	1182
2	4530.5				
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	1	0	0	0

$$\sum m_i = 2$$

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	9061	7179	5259	3319	1182
2	4530.5	3589.5			
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	1	0	0	0

$$\sum m_i = 2$$

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	9061	7179	5259	3319	1182
2	4530.5	3589.5			
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	1	1	0	0

$$\sum m_i = 3$$

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	9061	7179	5259	3319	1182
2	4530.5	3589.5	2629.5		
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	1	1	0	0

$$\sum m_i = 3$$

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	9061	7179	5259	3319	1182
2	4530.5	3589.5	2629.5	1659.5	591
3	3020.(3)	2393	1753	1106.(3)	
4	2265.25	1794.75	1314.75	829.75	
5	1812.2	1435.8	1051.8		
6	1510.1(6)	1196.5	876.5		
7	1294.429	1025.571			
8	1132.625	897.375			
9	1006.(7)				
10	906.1				
m_i	10	7	5	3	1

$$\Sigma m_i = 26$$

Jefferson vs D'Hondt

Método de Jefferson

- $M = 26$; $D = V/M = 1000$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i	9.061	7.179	5.259	3.319	1.182	26
$m_i = \lfloor q_i \rfloor$	9	7	5	3	1	25

$$q_i' < \lceil q_i' \rceil \Rightarrow m_i = \lfloor q_i' \rfloor$$

$$25 < M \Rightarrow \text{Diminuir } D$$

Jefferson vs D'Hondt

Método de Jefferson

- $M = 26$; $D = 1000$ $D' = ? < D$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i	9.061	7.179	5.259	3.319	1.182	26
$m_i = \lfloor q_i \rfloor$	9	7	5	3	1	25
$q_i' = v_i / D' \geq \lfloor q_i \rfloor + 1$	9+1	7+1	5+1	3+1	1+1	

Jefferson vs D'Hondt

Método de Jefferson

- $M = 26$; $D = 1000$ $D' = ? < D$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i	9.061	7.179	5.259	3.319	1.182	26
$m_i = \lfloor q_i \rfloor$	9	7	5	3	1	25
$q'_i = v_i / D' \geq \lfloor q_i \rfloor + 1$	9+1	7+1	5+1	3+1	1+1	
$D' \leq v_i / (\lfloor q_i \rfloor + 1)$	906.1	897.375	876.5	829.75	591	

Jefferson vs D'Hondt

Método de Jefferson

- $M = 26$; $D = 1000$ $D' = 906.1$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i	9.061	7.179	5.259	3.319	1.182	26
$m_i = \lfloor q_i \rfloor$	9	7	5	3	1	25
$q'_i = v_i / D' \geq \lfloor q_i \rfloor + 1$	9+1	7+1	5+1	3+1	1+1	
$D' \leq v_i / (\lfloor q_i \rfloor + 1)$	906.1	897.375	876.5	829.75	591	

Jefferson vs D'Hondt

Método de Jefferson

- $M = 26$; $D' = 906.1$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	10	7.923	5.804	3.663	1.305	26
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	10	7	5	3	1	26

Jefferson vs D'Hondt Método de Jefferson

- $M = 26$; $D =$ valor muito grande tal que todos $q_i \approx 0$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	0	0	0	0	0	0
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	0	0	0	0	0	0

$$q_i' < \lceil q_i' \rceil \Rightarrow m_i = \lfloor q_i' \rfloor$$

$0 < M \Rightarrow$ Diminuir D

Jefferson vs D'Hondt

Método de Jefferson

- $M = 26$; $D =$ valor muito grande $D' = ? < D$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	0	0	0	0	0	0
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	0	0	0	0	0	0
$q_i' = v_i / D' \geq \lfloor q_i' \rfloor + 1$	1	1	1	1	1	
$D' \leq v_i / (\lfloor q_i' \rfloor + 1)$	9061	7179	5259	3319	1182	

Jefferson vs D'Hondt Método de Jefferson

- $M = 26$; $D' = \max v_i / (\lfloor q_i' \rfloor + 1) = 9061 / (0 + 1)$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	0	0	0	0	0	0
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	0	0	0	0	0	0
$q_i' = v_i / D' \geq \lfloor q_i' \rfloor + 1$	1	1	1	1	1	
$D' \leq v_i / (\lfloor q_i' \rfloor + 1)$	9061	7179	5259	3319	1182	

Jefferson vs D'Hondt Método de Jefferson

- $M = 26$; $D' = 9061 / (0+1)$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	1	0.7923	0.5804	0.3663	0.1304	
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	1	0	0	0	0	1

$1 < M \Rightarrow$ Diminuir D'

Jefferson vs D'Hondt

Método de Jefferson

- $M = 26$; $D' = 9061 / (0+1)$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	1	0.7923	0.5804	0.3663	0.1304	
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	1	0	0	0	0	1
$q_i' = v_i / D' \geq \lfloor q_i' \rfloor + 1$	1+1	0+1	0+1	0+1	0+1	
$D' \leq v_i / (\lfloor q_i' \rfloor + 1)$	4530.5	7179	5259	3319	1182	

Jefferson vs D'Hondt Método de Jefferson

- $M = 26$; novo $D' = \max v_i / (\lfloor q_i' \rfloor + 1) = 7179 / (0 + 1)$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	1	0.7923	0.5804	0.3663	0.1304	
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	1	0	0	0	0	1
$q_i' = v_i / D' \geq \lfloor q_i' \rfloor + 1$	1+1	0+1	0+1	0+1	0+1	
$D' \leq v_i / (\lfloor q_i' \rfloor + 1)$	4530.5	7179	5259	3319	1182	

Jefferson vs D'Hondt Método de Jefferson

- $M = 26$; $D' = 7179 / (0+1)$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	1.2622	1	0.7326	0.4623	0.1646	
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	1	1	0	0	0	2

$2 < M \Rightarrow$ Diminuir D'

Jefferson vs D'Hondt

Método de Jefferson

- $M = 26$; $D' = 9061 / (0+1)$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	1.2622	1	0.7326	0.4623	0.1646	
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	1	1	0	0	0	2
$q_i' = v_i / D' \geq \lfloor q_i' \rfloor + 1$	1+1	1+1	0+1	0+1	0+1	
$D' \leq v_i / (\lfloor q_i' \rfloor + 1)$	4530.5	3589.5	5259	3319	1182	

Jefferson vs D'Hondt

Método de Jefferson

- $M = 26$; novo $D' = \max v_i / (\lfloor q_i' \rfloor + 1) = 5259 / (0+1)$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	1.2622	1	0.7326	0.4623	0.1646	
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	1	1	0	0	0	2
$q_i' = v_i / D' \geq \lfloor q_i' \rfloor + 1$	1+1	1+1	0+1	0+1	0+1	
$D' \leq v_i / (\lfloor q_i' \rfloor + 1)$	4530.5	3589.5	5259	3319	1182	

Jefferson vs D'Hondt Método de Jefferson

- $M = 26$; $D' = 5259 / (0+1)$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	1.7230	1.3651	1	0.6311	0.2248	
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	1	1	1	0	0	3

$3 < M \Rightarrow$ Diminuir D'

Jefferson vs D'Hondt Método de Jefferson

- $M = 26$; $D' = 9061/(9+1)$

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
v_i	9061	7179	5259	3319	1182	26000
q_i'	10	7.923	5.804	3.663	1.305	26
$m_i = \lfloor q_i' \rfloor$	10	7	5	3	1	26

Métodos de divisores

Métodos de divisores	Pontos de arredondamento $d(q_i')$	Sequência de divisores $d(q_i')$
Adams	$\lfloor q_i' \rfloor$	0, 1, 2, 3,...
Dean	$2 \lfloor q_i' \rfloor \lceil q_i' \rceil / (\lfloor q_i' \rfloor + \lceil q_i' \rceil)$	0, 4/3, 12/5, 24/7,...
Huntington-Hill	$\sqrt{\lfloor q_i' \rfloor \lceil q_i' \rceil}$	0, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{12}$,...
Webster = Sainte-Laguë	$(\lfloor q_i' \rfloor + \lceil q_i' \rceil) / 2$	1/2, 3/2, 5/2, 7/2,...
Jefferson = D'Hondt	$\lceil q_i' \rceil$	1, 2, 3, 4,...



Referências

- [1] Balinski, M. , Young, H. P. (2001), “Fair representation: meeting the ideal of one man, one vote”, 2ª edição, Brookings Institution Press, Washinton D. C. (primeira edição em 1982)
- [2] Beumer, M. (2010), “Apportionment in theory and practice”, tese de mestrado, Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam