



ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ALGARVE
ÁREA DEPARTAMENTAL DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE DE ESTRUTURAS II

AULAS PRÁTICAS

PARTE 2

Método dos Deslocamentos

Eng. Vítor Barreto
Eng. Rui Costa

Setembro de 2008

PREFÁCIO

Estes apontamentos de apoio às aulas Práticas são constituídos por três partes: 2.1 - Problemas Resolvidos, 2.2 - Problemas Propostos e 2.3 - Enunciados de alguns exercícios saídos em provas escritas com as respectivas soluções.

Os problemas 2.1.4 a 2.1.7 são elaborados sobre uma mesma geometria estrutural. Desta forma diferenciam-se melhor alguns dos pormenores de aplicação do Método dos Deslocamentos. Este conjunto torna-se monótono e é mais indicado para um estudo do tipo autodidacta e permite, no caso de revisões, a apreensão imediata dos conceitos mais importantes. Por isso, como alternativa, se apresentam nas aulas outros problemas alguns dos quais se encontram neste capítulo. O problema padrão que trata da aplicação do PTV como ferramenta de ajuda ao Método dos Deslocamentos, é o exercício 2.1.9. Cabe ao docente das aulas práticas escolher quais dos problemas e exercícios irá resolver nas suas aulas.

Os restantes capítulos apresentam propostas de exercícios e questões saídas em provas. Sugere-se a resolução das do último capítulo.

Sempre que for conveniente poderão ser acrescentados a este documento mais exercícios, mantendo-se o critério de numeração das páginas. Este documento é na verdade uma actualização e melhoramento do que existia nos anos lectivos anteriores. Nesta actualização teve papel importante na elaboração dos desenhos, esquemas e tratamento gráfico o docente Rui Costa. Para além disso concebeu alguns dos novos problemas colmatando falhas antes existentes. Pensamos ter conseguido assim um texto mais apelativo ao estudo.

Agradecemos aos leitores vivas críticas e igualmente construtivas de modo a que se possam fazer os devidos aperfeiçoamentos.

Obrigado.

Os docentes
Vítor Barreto
Rui Costa

ANÁLISE DE ESTRUTURAS II

Parte 2 – Método dos Deslocamentos

Capítulo 2.1 – Exercícios Resolvidos

ANÁLISE DE ESTRUTURAS II

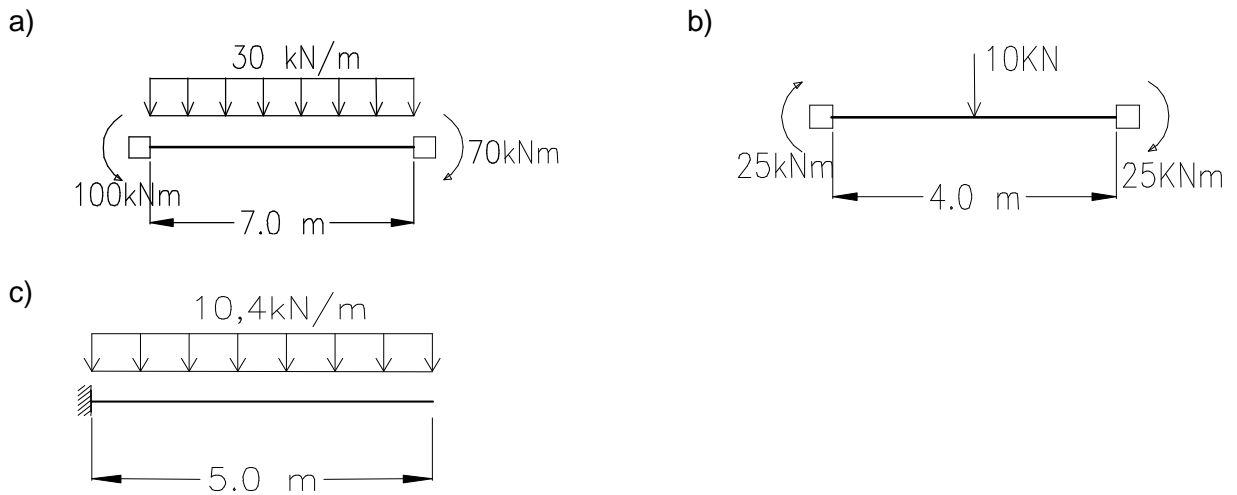
Parte 2.1 – Método dos Deslocamentos

Índice

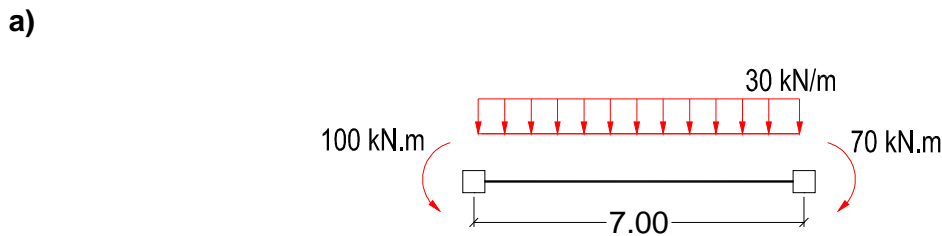
PROBLEMA 2.1.1	4
Resolução do Problema 2.1.1	4
PROBLEMA 2.1.2	8
Resolução do Problema 2.1.2	9
PROBLEMA 2.1.3	14
Resolução do Problema 2.1.3	15
PROBLEMA 2.1.4	17
Resolução do Problema 2.1.4	18
PROBLEMA 2.1.5	26
Resolução do Problema 2.1.5	27
PROBLEMA 2.1.6	30
Resolução do Problema 2.1.6	30
PROBLEMA 2.1.7	33
Resolução do Problema 2.1.7	33
PROBLEMA 2.1.8	37
Resolução do problema 2.1.8	38
PROBLEMA 2.1.9	42
Resolução do problema 2.1.9	42
PROBLEMA 2.1.10	49
Resolução do problema 2.1.10	49

PROBLEMA 2.1.1

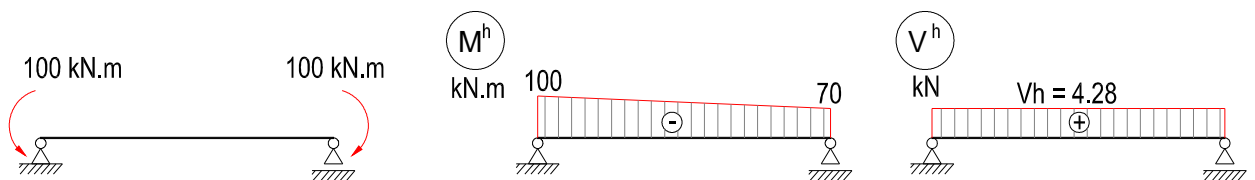
Esboce os diagramas de esforços finais (momentos e esforços transversos) a partir dos diagramas hiperestáticos e isostáticos, indicando sempre os valores notáveis.



Resolução do Problema 2.1.1



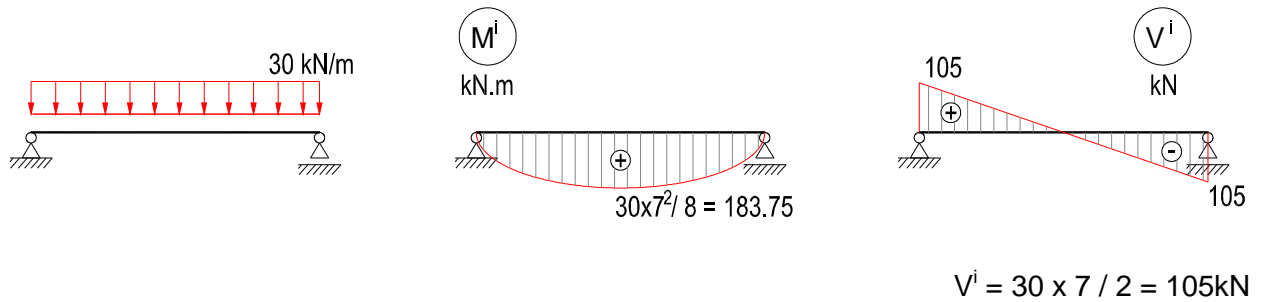
Parcela hiperestática



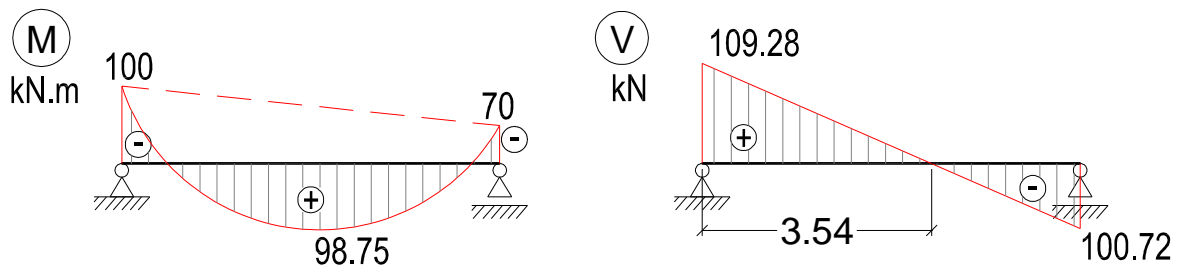
$$V^h = \frac{M_j^h - M_i^h}{L} = \frac{-70 - (-100)}{7} = 4.28 \text{ kN}$$

Nota: i – extremidade inicial / j – extremidade final

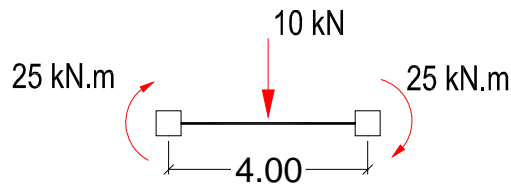
Parcela isostática



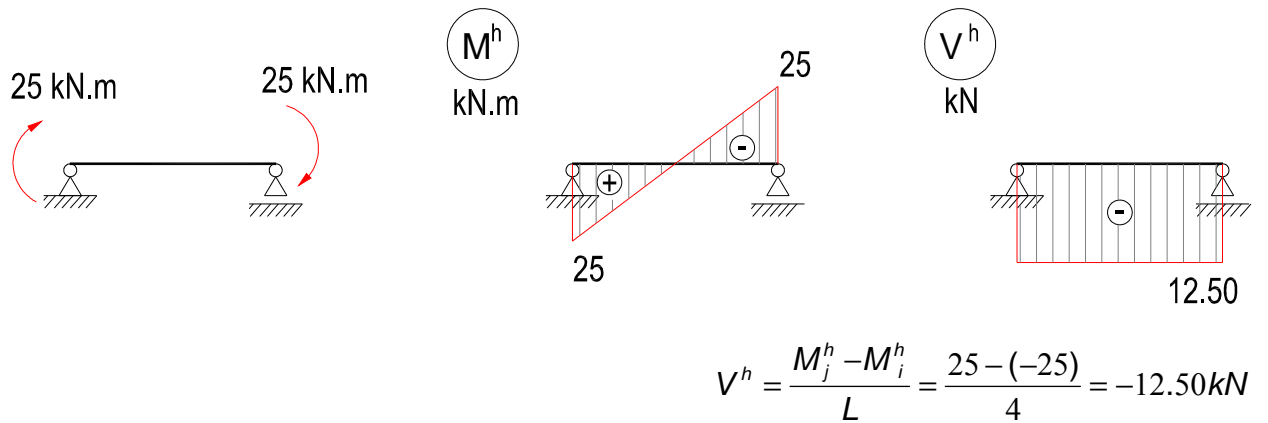
Esforços finais



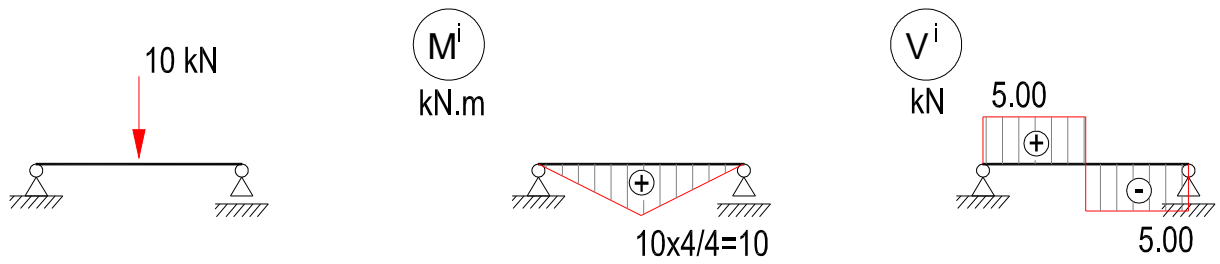
b)



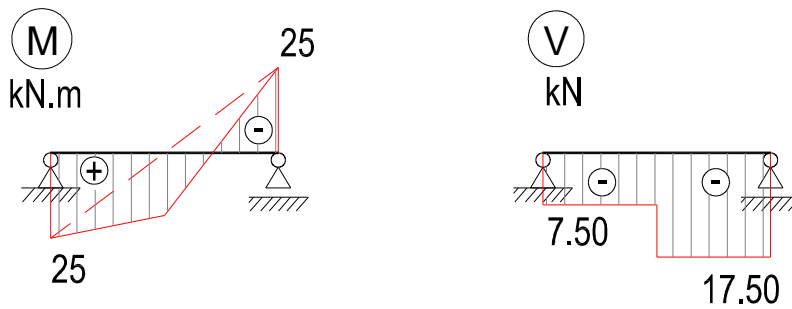
Parcela hiperestática



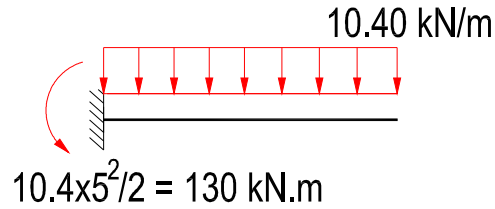
Parcela isostática



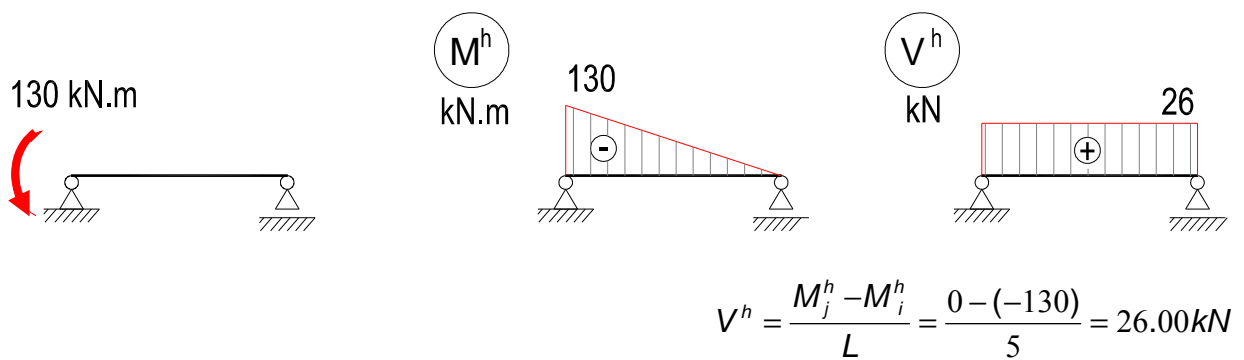
Esforços finais



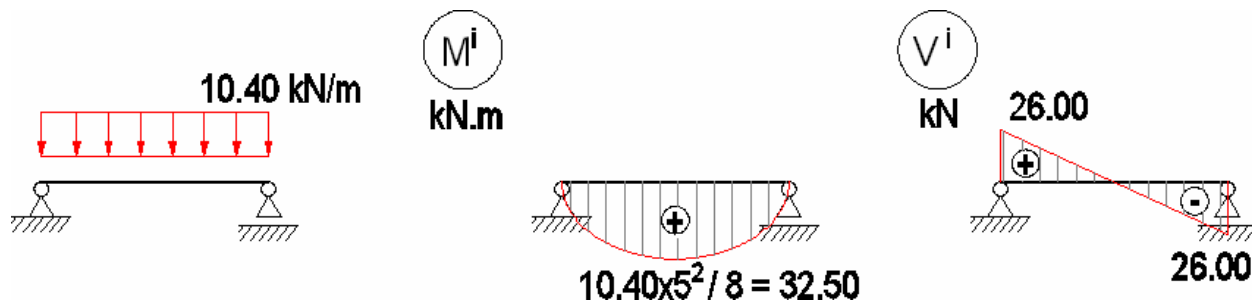
c)



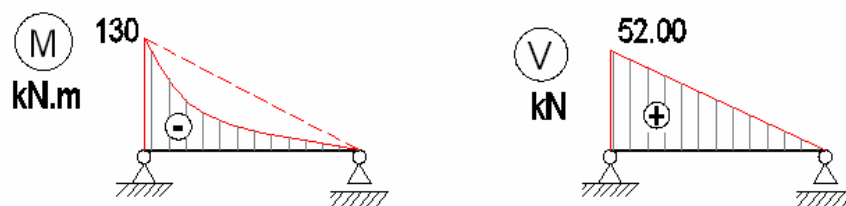
Parcela hiperestática



Parcela isostática



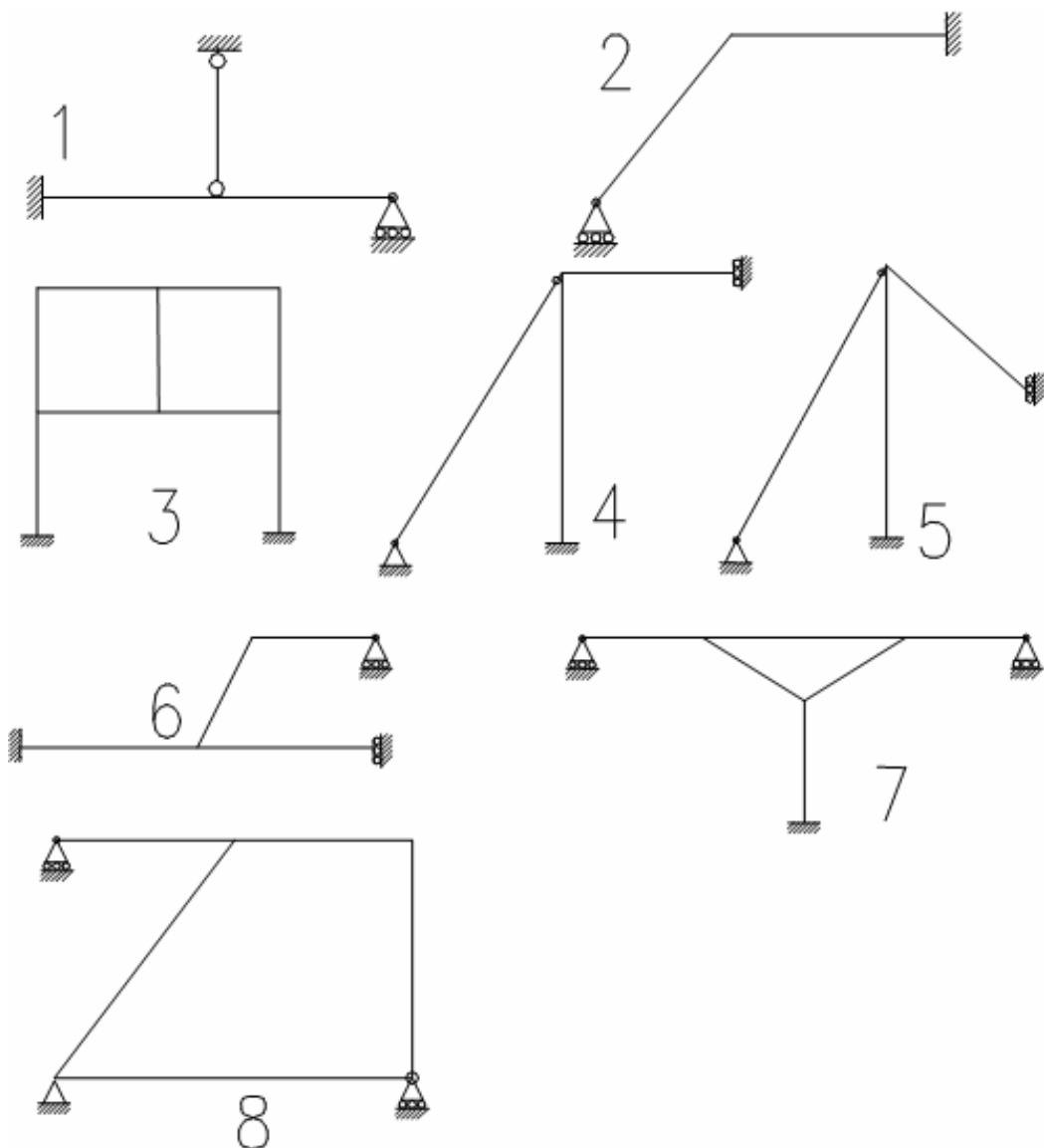
Esforços finais



PROBLEMA 2.1.2

As estruturas são deformáveis axialmente e por flexão. Para cada delas responda às alíneas seguintes.

- Indique quais os deslocamentos nodais independentes e determine o grau de indeterminação cinemático, β .
- Esboce a estrutura fundamental, e identifique os elementos base (E-E, E-R, E-M e R-R)
- Desenhe os modos de deformação (ou pelo menos três à sua escolha, envolvendo dois deles translação nodal) contabilizando o valor dos deslocamentos dependentes que existirem.

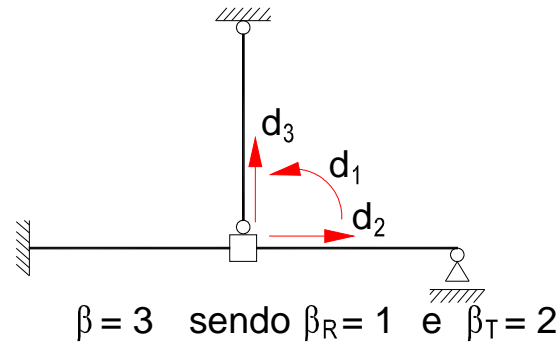


Resolução do Problema 2.1.2

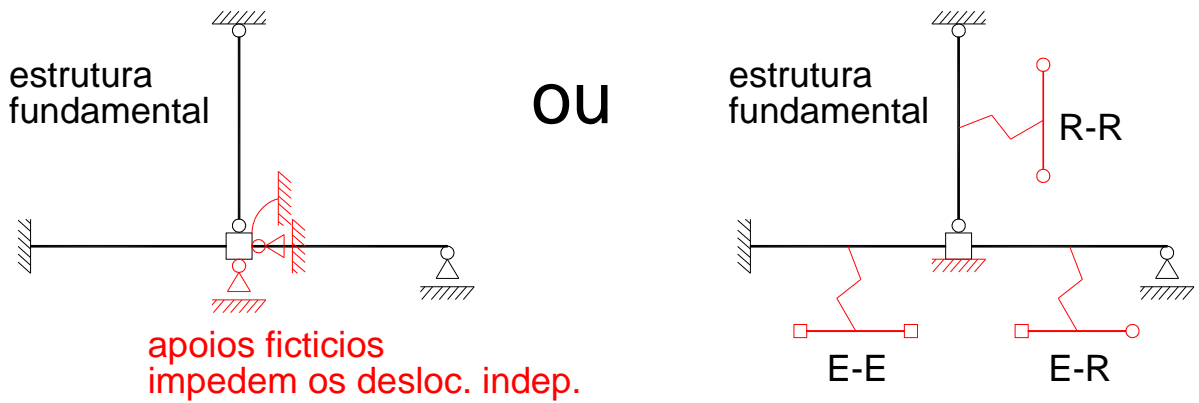
Apresentam-se apenas três exemplos:

Estrutura 1

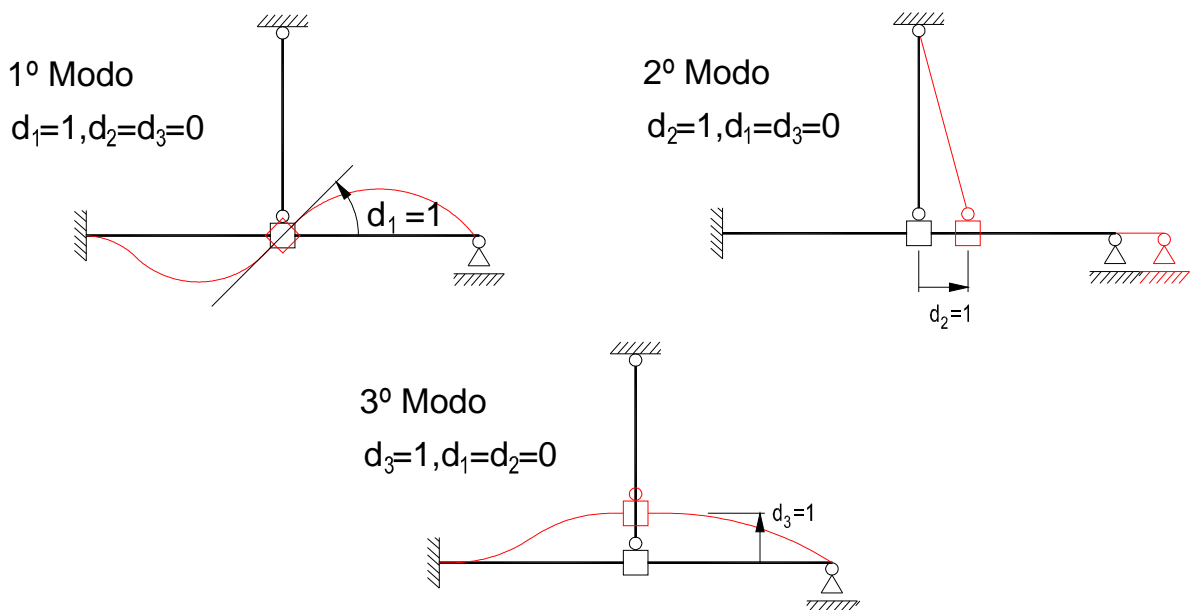
a)



b)

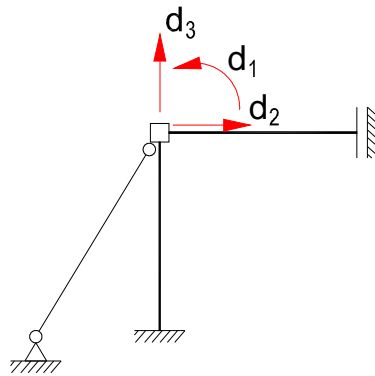


c)



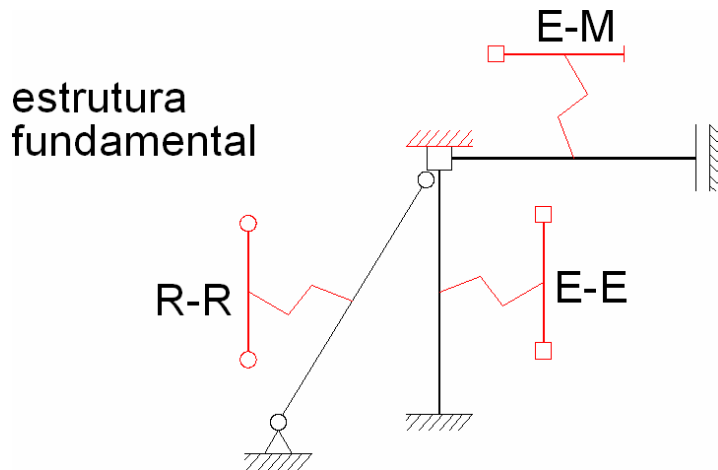
Estrutura 4

a)

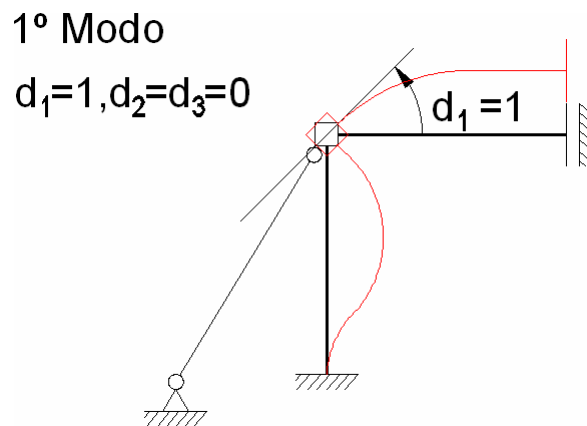


$\beta = 3$ sendo $\beta_R = 1$ e $\beta_T = 2$

b)



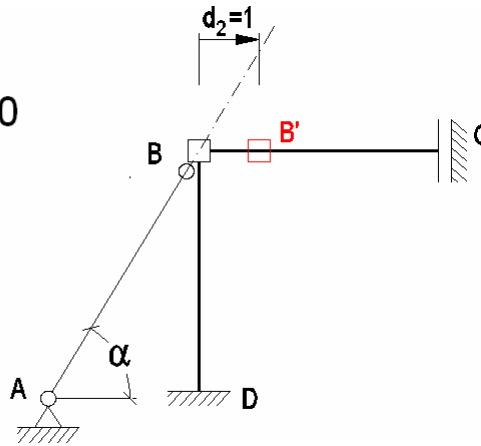
c)



No 2º modo, a deformada implica alterações na geometria em mais do que uma barra. A forma de elaborar o desenho da deformada será apresentada com uma explicação detalhada:

- i – Identificar o deslocamento nodal $d_2 = 1\text{m}$ ($BB'=1$);
- ii – Prolongar **AB**;

2º Modo
 $d_2=1, d_1=d_3=0$

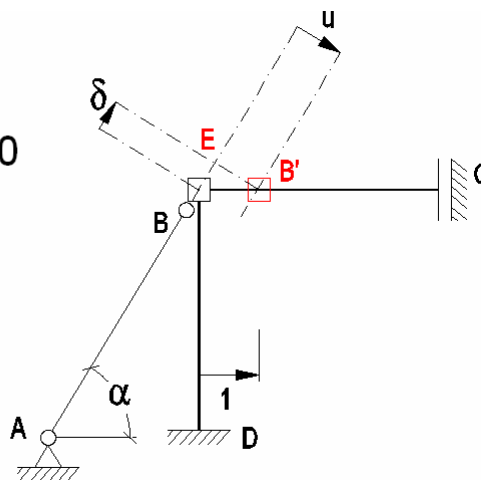


iii - Traçar uma perpendicular ao prolongamento de **AB** de modo a que intersecte o ponto **B'**;

iv – Surge o triângulo **BEB'** onde se denotam as seguintes grandezas:

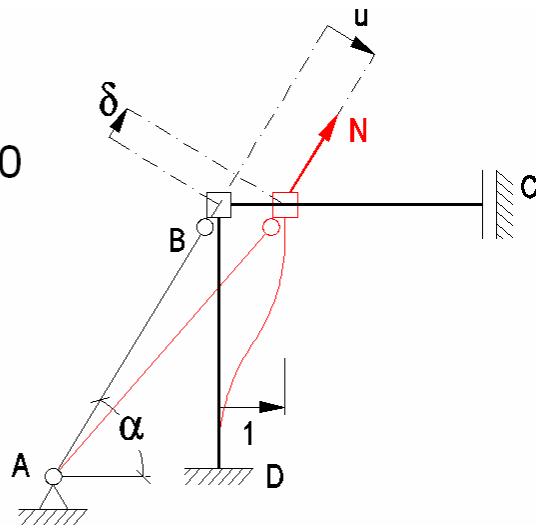
- O ângulo entre **(BB')** e **(BE)** = α ;
- Traçando uma paralela a **EB'** que passa por B obtemos $\delta = \mathbf{BE}$ = deformação axial da barra **AB**;
- Traçando uma paralela a **AB** que passa por **B'** obtemos $u = \mathbf{EB'}$ = deformação transversal da barra **AB**;

2º Modo
 $d_2=1, d_1=d_3=0$

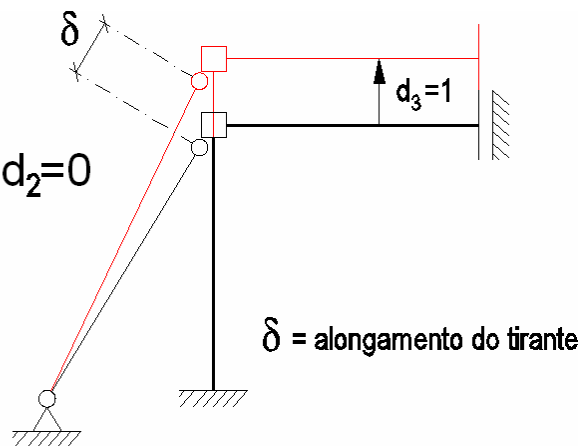


v – Desenhar as barras na posição deformada. O esforço axial de tracção N é paralelo à barra **AB** (na hipótese dos pequenos deslocamentos). $N = EA/L * \delta$;

2º Modo
 $d_2=1, d_1=d_3=0$

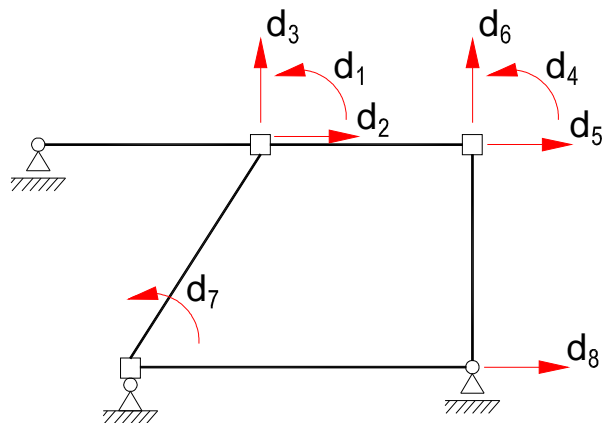


3º Modo
 $d_3=1, d_1=d_2=0$



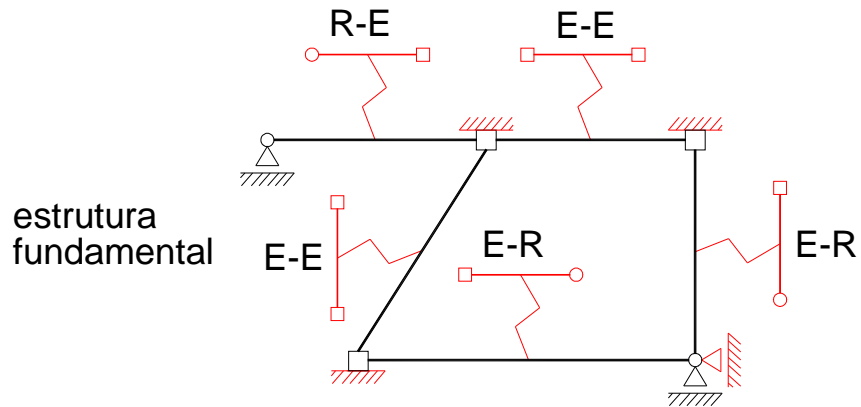
Estrutura 8

a)



$\beta = 8$ sendo $\beta_R = 3$ e $\beta_T = 5$

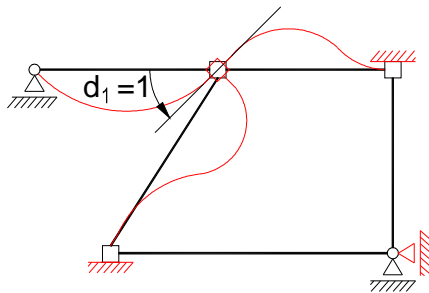
b)



c)

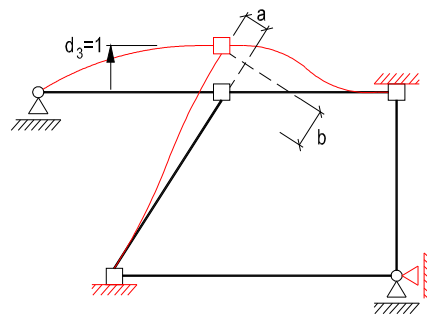
1º Modo

$$d_1=1, d_2=d_3=d_4=d_5=d_6=d_7=d_8=0$$



3º Modo

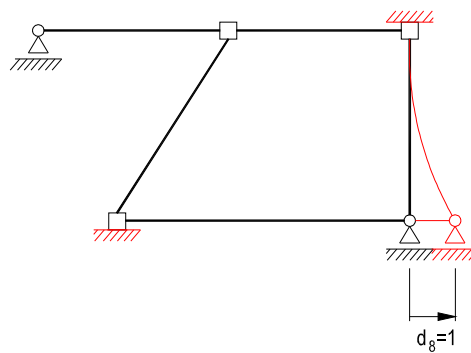
$$d_3=1, d_1=d_2=d_4=d_5=d_6=d_7=d_8=0$$



a = deslocamento transversal na barra DB
b = deslocamento longitudinal na barra DB

8º Modo

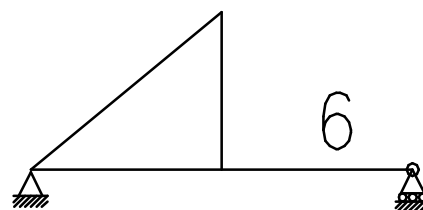
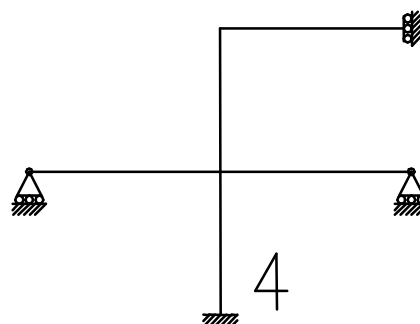
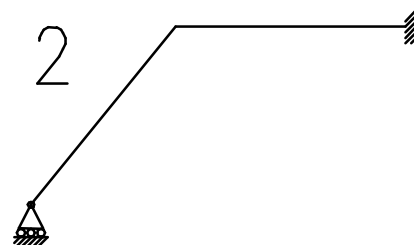
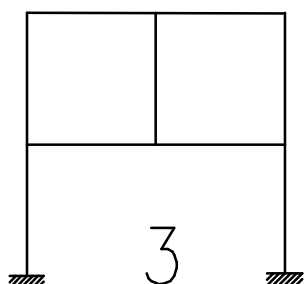
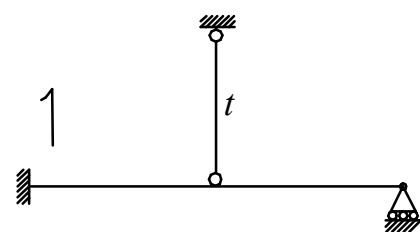
$$d_8=1, d_1=d_2=d_3=d_4=d_5=d_6=d_7=0$$



PROBLEMA 2.1.3

As estruturas são constituídas por barras axialmente indeforáveis, excepto os tirantes assinalados por *t*. Para cada delas responda às alíneas seguintes.

- Indique quais os deslocamentos nodais independentes e determine o grau de indeterminação cinemático, β
- Esboce a estrutura fundamental, e identifique os elementos base (E-E, E-R, E-M e R-R)
- Desenhe os modos de deformação (ou pelo menos três à sua escolha, envolvendo dois deles translação nodal) contabilizando o valor dos deslocamentos dependentes que existirem.

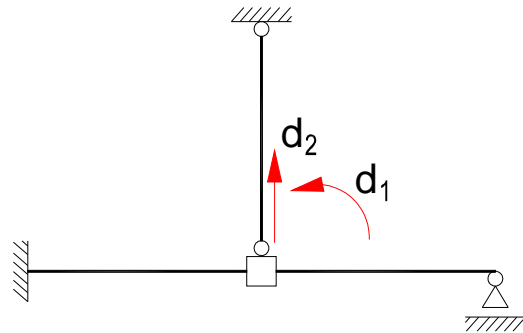


Resolução do Problema 2.1.3

Apresentam-se apenas dois exemplos:

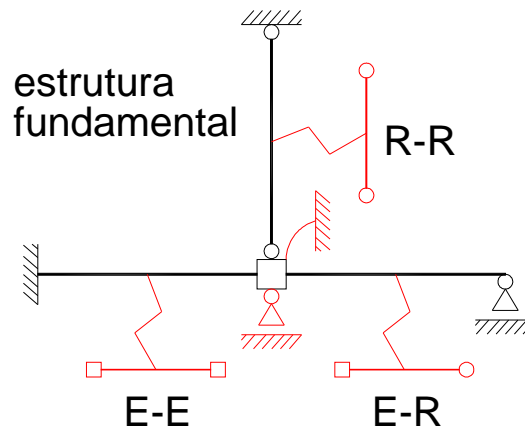
Estrutura 1

a)

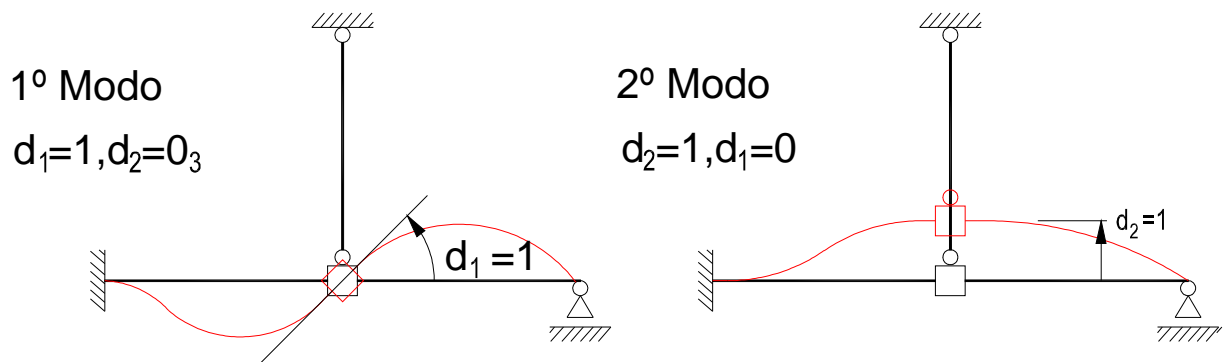


$$\beta = 2 \text{ sendo } \beta_R = 1 \text{ e } \beta_T = 1$$

b)

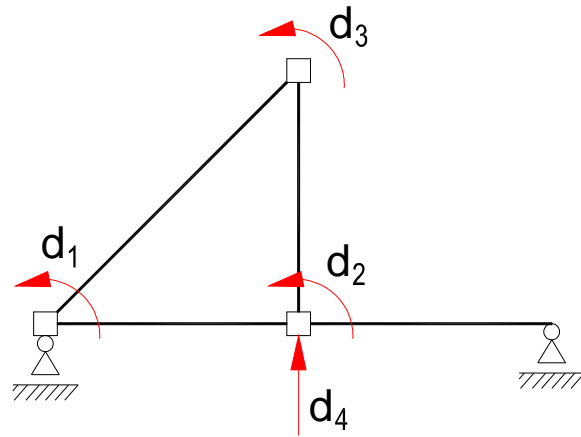


c)



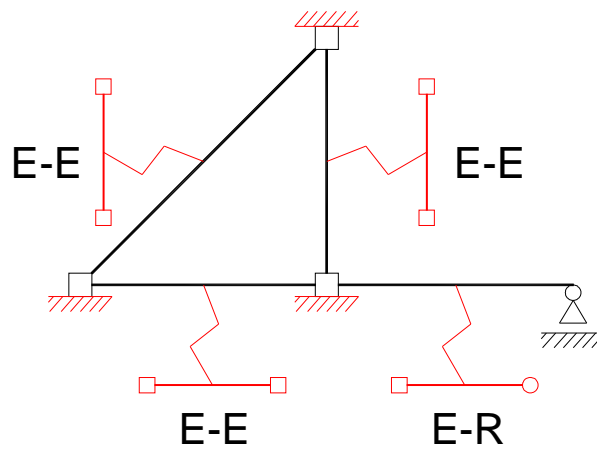
Estrutura 6

a)

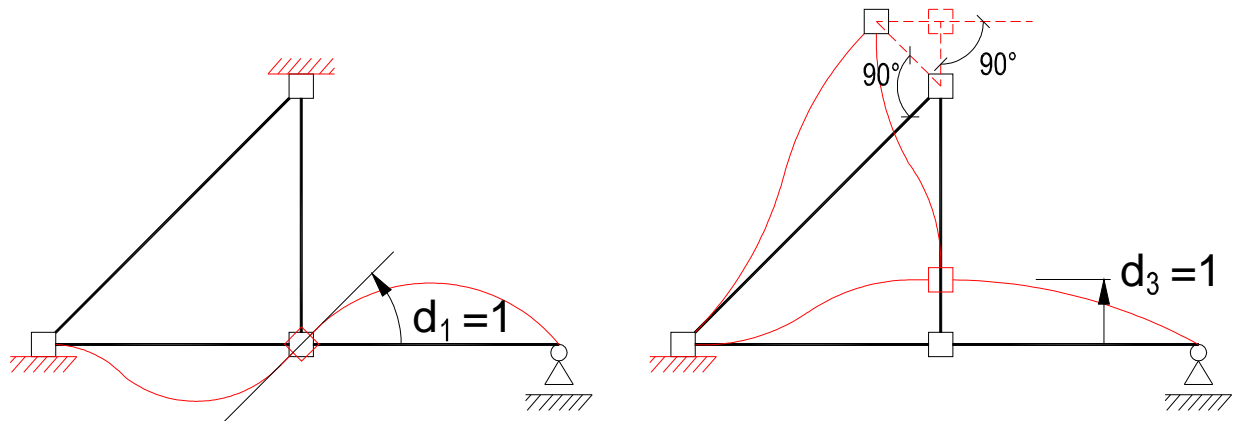


$\beta = 4$ sendo $\beta_R = 3$ e $\beta_T = 1$

b)



c)



PROBLEMA 2.1.4

- a) Atendendo às acções presentes (e à matéria de Análise de Estruturas I) adopte simplificações de simetria.
- b) Para a estrutura simplificada desenhe os digramas finais de momentos flectores.
- c) Qual o valor final da rotação em A e flecha no centro do tramo central.

$$E=30 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

Pilar: secção (bxh)=0.30m x 0.30m

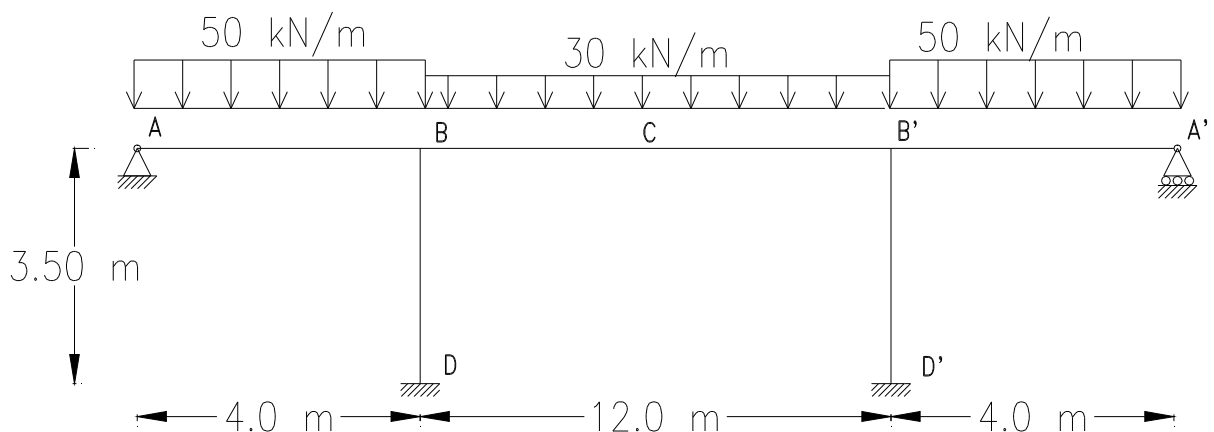
Viga :secção (bxh)=030m x 1.20m

b x h: o "h" está contido no plano da estrutura

(Sugestão para a resolução da alínea b):

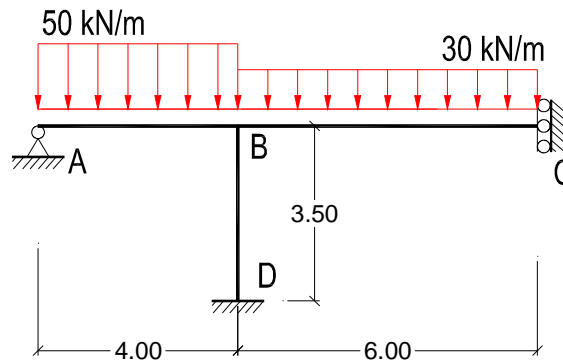
Proceda de acordo com a seguinte ordem:

- (i) identifique os deslocamentos nodais independentes;
- (ii) Desenhe a estrutura fundamental;
- (iii) Descretize a estrutura fundamental e adopte um vector de esforços independentes $\{X\}_{\text{adopt.}}$;
- (iv) Desenhe os modos de deformação e monte a matriz de rigidez $[K]$ e a matriz de esforços $[E]$;
- (v) Para a fase "zero" -estrutura fundamental +cargas de vão- determine o vector de forças de fixação $\{Q_0\}$ e de esforços de fixação $\{X_0\}$;
- (vi) Determine o vector de forças aplicadas $\{Q\}$;
- (vii) Estabeleça a equação de equilíbrio do método e calcule $\{d\}$;
- (viii) Proceda finalmente ao cálculo de esforços finais (independentes) recorrendo à equação de sobreposição de efeitos;
- (ix) Desenhe os momentos flectores hiperestáticos na estrutura dada e sobreponha a parcela isostática tendo em consideração a acção de vão.



Resolução do Problema 2.1.4

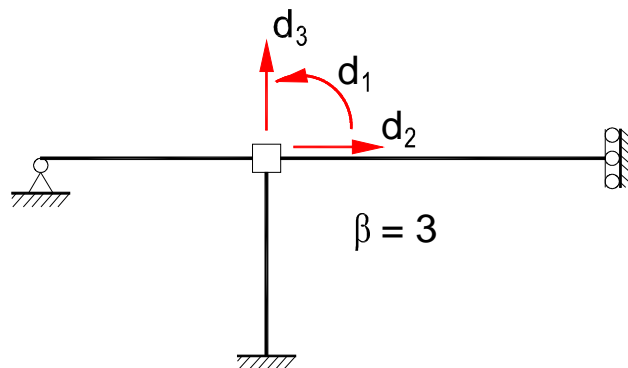
a) Simplificações de simetria: vamos considerar metade da estrutura, pois esta é simétrica e o seu carregamento também o é.



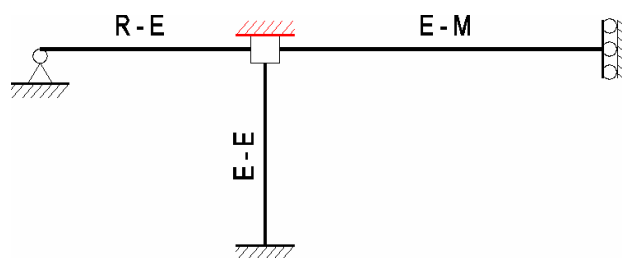
Cálculos auxiliares:

Pilar: $0.30 \times 0.30 \rightarrow A_p = 0.09 \text{ m}^2 \rightarrow EA_p = 2.7 \times 10^6 \text{ kN}$
 $\rightarrow I_p = 6.75 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \rightarrow EI_p = 20250 \text{ kN.m}^2$
 Viga: $0.30 \times 1.20 \rightarrow A_v = 0.36 \text{ m}^2 \rightarrow EA_v = 10.8 \times 10^6 \text{ kN}$
 $\rightarrow I_v = 4.32 \times 10^{-2} \text{ m}^4 \rightarrow EI_v = 1.296 \times 10^6 \text{ kN.m}^2$

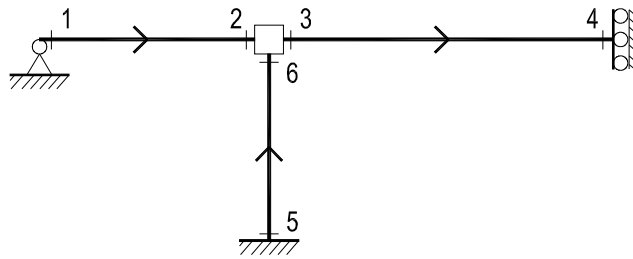
Deslocamentos nodais independentes:



Estrutura fundamental



Discretização, escolha dos esforços independentes (secções críticas):



Nota: os esforços independentes barra a barra são:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ N_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ N_6 \end{Bmatrix}$$

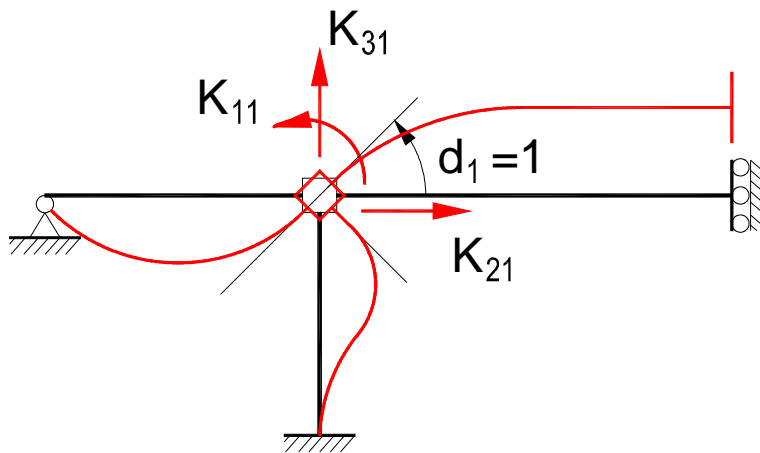
Há toda a vantagem em reduzir o vector $\{X\}$, porque conduz a um menor esforço de cálculo manual. O problema só pede momentos finais, por isso, pode-se retirar todos os esforços axiais do vector, isto é, N_2 , N_4 e N_6 .

Em virtude do apoio "A" ser rotulado, o momento M_1 é nulo e por isso também se retira M_1 do vector, o qual ficará então:

$$\{X_f\} = \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}$$

Note-se ainda que M_6 poderia ser anulado pois resulta do equilíbrio entre M_2 e M_3 , no entanto, mantém-se para controlo de contas (detectar possíveis erros).

Modos de deformação, cálculo de [K] e [E]:

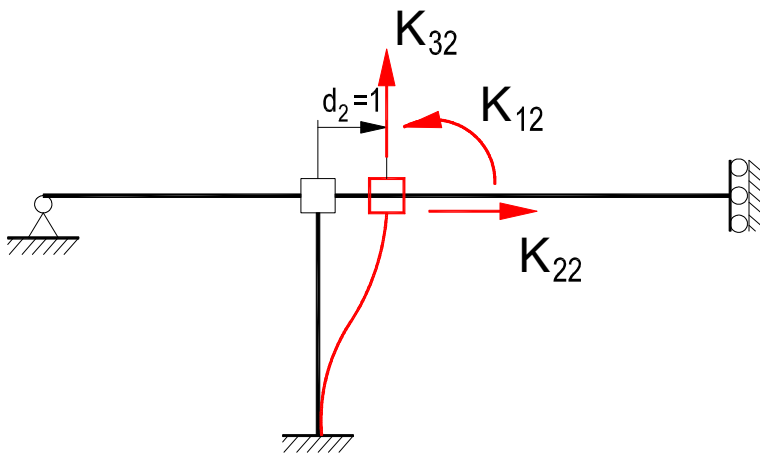


1º MODO

$$k_{11} = \frac{3(EI)_v}{4} + \frac{4(EI)_p}{3.5} + \frac{(EI)_v}{6} = 12.10 \times 10^5 \text{ kN.m/rad}$$

$$k_{21} = \frac{6(EI)_p}{3.5^2} = 0.10 \times 10^5 \text{ kN/rad}$$

$$k_{31} = -\frac{3(EI)_v}{4^2} = -2.43 \times 10^5 \text{ kN/rad}$$

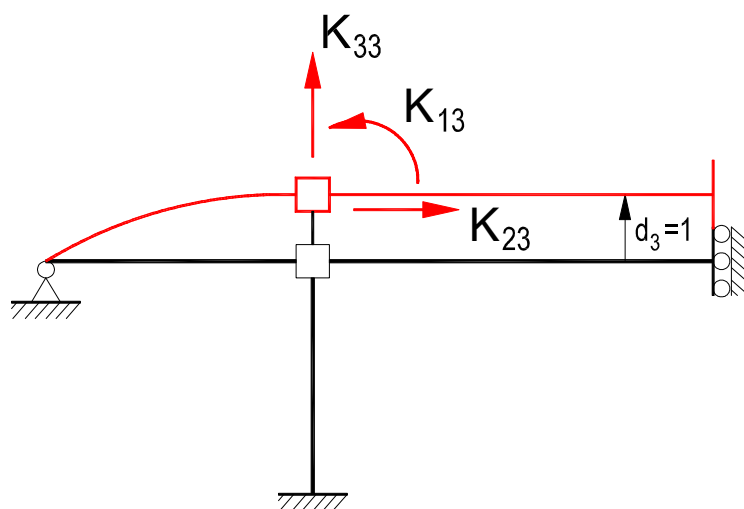


2º MODO

$$k_{12} = \frac{6(EI)_p}{3.5^2} = 0.10 \times 10^5 \text{ kN/m}$$

$$k_{22} = \frac{(EA)_v}{4} + \frac{(EA)_v}{6} + \frac{12(EI)_p}{3.5^3} = 45.06 \times 10^5 \text{ kN/m}$$

$$k_{32} = 0$$



3º MODO

$$k_{13} = -\frac{3(EI)_v}{4^2} = -2.43 \times 10^5 \text{ kN.m/m}$$

$$k_{23} = 0$$

$$k_{33} = \frac{(EA)_p}{3.5} + \frac{3(EI)_v}{4^3} = 8.32 \times 10^5 \text{ kN/m}$$

A matriz de rigidez será:

$$[K] = \begin{bmatrix} 12.10 & 0.10 & -2.43 \\ 0.10 & 45.06 & 0 \\ -2.43 & 0 & 8.32 \end{bmatrix} \times 10^5$$

A matriz de esforços independentes associados a cada modo será (referencial da resistência do materiais):

$$E_1 = \begin{Bmatrix} E_{21} \\ E_{31} \\ E_{41} \\ E_{51} \\ E_{61} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3(EI)_v}{4} \\ -(EI)_v \\ \frac{6}{(EI)_v} \\ \frac{6}{2(EI)_p} \\ \frac{3.5}{4(EI)_p} \\ \frac{3.5}{3.5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 972000 \\ -216000 \\ -216000 \\ -11571 \\ 23143 \end{Bmatrix}$$

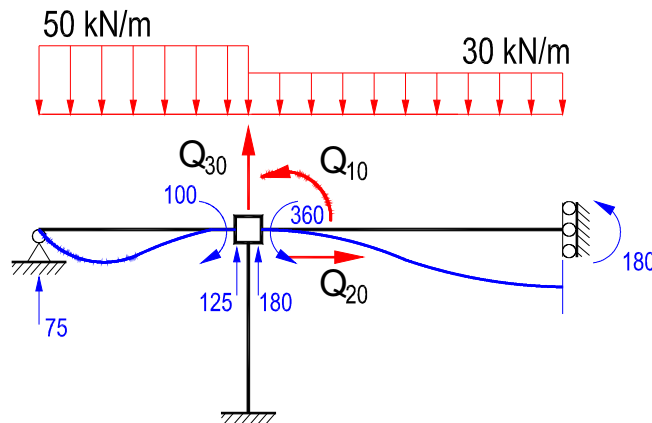
$$E_2 = \begin{Bmatrix} E_{22} \\ E_{32} \\ E_{42} \\ E_{52} \\ E_{62} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{6(EI)_p}{3.5^2} \\ \frac{6(EI)_p}{3.5^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -9918 \\ 9918 \end{Bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{Bmatrix} E_{23} \\ E_{33} \\ E_{43} \\ E_{53} \\ E_{63} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3(EI)_v}{4^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -243000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A matriz final resulta do agrupamento das 3 colunas – $[E] = [\{E_1\} \{E_2\} \{E_3\}]$:

$$[E] = \begin{bmatrix} 972000 & 0 & -243000 \\ -216000 & 0 & 0 \\ -216000 & 0 & 0 \\ -11571 & -9918 & 0 \\ 23143 & 9918 & 0 \end{bmatrix}$$

Forças de fixação devidas às cargas de vão Q_0 e esforços na fase inicial (fase zero) X_0



$$\{Q_0\} = \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ Q_{30} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 360 - 100 \\ 0 \\ 125 + 180 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 260 \text{ kN.m} \\ 0 \text{ kN} \\ 305 \text{ kN} \end{Bmatrix} \quad \{X_0\} = \begin{Bmatrix} -100 \\ -360 \\ 180 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

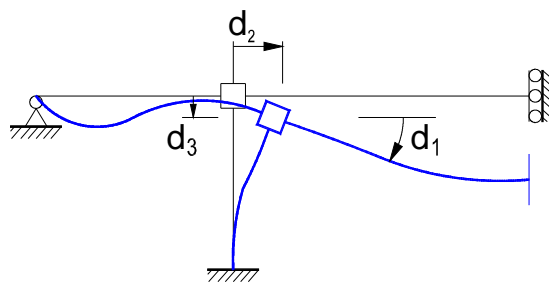
Vector das forças nodais aplicadas:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O carregamento não é constituído por cargas nodais que actuem na direcção dos deslocamentos independentes, pelo que $\{Q\} = 0$.

Equação de equilíbrio de forças:

$$[K]^* \{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12.10 & 0.10 & -2.43 \\ 0.10 & 45.06 & 0 \\ -2.43 & 0 & 8.32 \end{bmatrix} \times 10^5 \times \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 260 \\ 0 \\ 305 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = -30.65 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ d_2 = 0.07 \times 10^{-5} \text{ m} \\ d_3 = -45.61 \times 10^{-5} \text{ m} \end{cases}$$



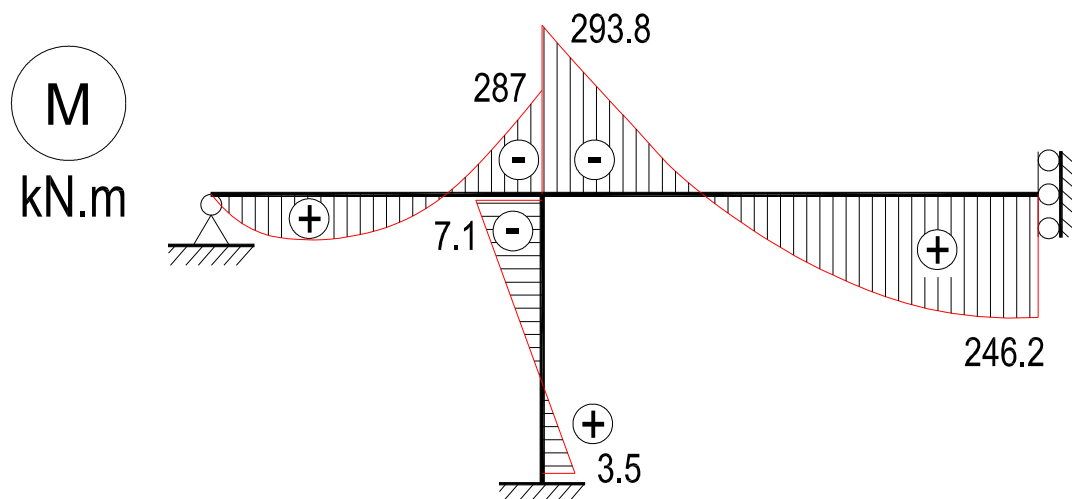
$$\{d\} = \begin{Bmatrix} -30.65 \\ 0.07 \\ -45.61 \end{Bmatrix} \times 10^{-5}$$

b) Cálculo dos esforços (princípio da sobreposição de efeitos):

$$\{X_f\} = [E] * \{d\} + \{X_0\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 972000 & 0 & -243000 \\ -216000 & 0 & 0 \\ -216000 & 0 & 0 \\ -11571 & -9918 & 0 \\ 23143 & 9918 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -30.65 \\ 0.07 \\ -45.61 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} + \begin{Bmatrix} -100 \\ -360 \\ 180 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -287 \\ -293.8 \\ 246.2 \\ 3.5 \\ -7.1 \end{Bmatrix}$$

Diagrama de momentos flectores:

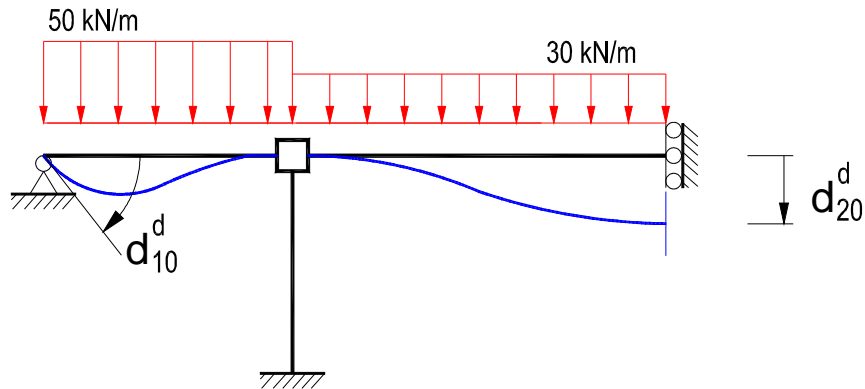


Usualmente recorre-se a outra via que consiste em calcular os esforços transversos a partir dos momentos flectores finais, como se fez nos exercícios iniciais deste capítulo, e por equilíbrio dos nós, determinar os esforços normais.

Uma terceira via, consiste em determinar as reacções de apoio e posteriormente determinar os esforços normais em cada barra.

c) cálculo da rotação em “A” e da flecha em “C”

Fase zero – vector $\{d_0^d\}$:



Nota: os sentidos na figura são arbitrados e passam a ser o referencial para estas deformações.

das tabelas:

$$d_{10}^d = \theta_B = PL^3 / 48EI_v = 50 \times 4^3 / (48 \times 1.296 \times 10^6) = 5.14 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$d_{20}^d = \delta_B = PL^4 / 24EI_v = 30 \times 6^4 / (24 \times 1.296 \times 10^6) = 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{vector } \{d_0^d\} = \begin{Bmatrix} 5.14 \times 10^{-5} \\ 1.25 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

Deslocamentos devidos aos modos de deformação – matriz [D]:

$$1^\circ \text{ modo} \quad D_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} x1 \\ -\frac{6}{2} x1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

$$2^\circ \text{ modo} \quad D_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$3^\circ \text{ modo} \quad D_3 = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2 \times 4} x1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.375 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{assim resulta a matriz } [D] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.375 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Deslocamentos totais:

$$\{d^d\} = [D]x\{d\} + \{d_0^d\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} d_1^d \\ d_2^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.375 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} -3.065 \\ 0.07 \\ -45.61 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} + \begin{Bmatrix} 5.14 \times 10^{-5} \\ 1.25 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.92 \times 10^{-5} \\ 0.00263 \end{Bmatrix} \begin{matrix} rad \\ m \end{matrix}$$

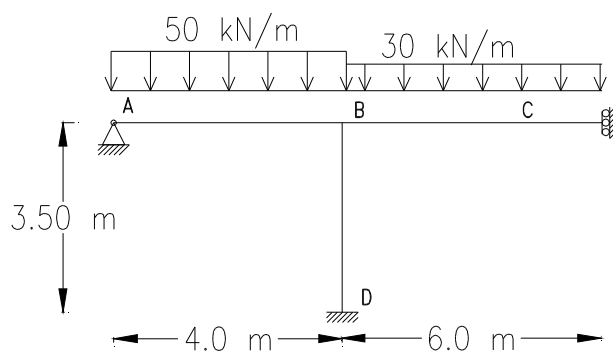
Como ambos os valores resultaram positivos, conclui-se que os deslocamentos são nos sentidos adoptados.

PROBLEMA 2.1.5

Dada a semi-estrutura do Problema 2.1.4, determine os momentos flectores para:

- Caso em que haja um assentamento de apoio de 3mm, vertical de cima para baixo na base do pilar, nó D;
- Caso em que ocorra o assentamento descrito na alínea a) em simultâneo com as acções de vão.

(Nota: Este assentamento corresponde, na estrutura completa, ao assentamento simultâneo dos apoios dos pilares nos nós D e D', em virtude das simplificações de simetria. Se na verdade pretendêssemos só o assentamento de D, na estrutura completa, não seria legítimo fazer simplificações de simetria, visto tratar-se de uma acção assimétrica.

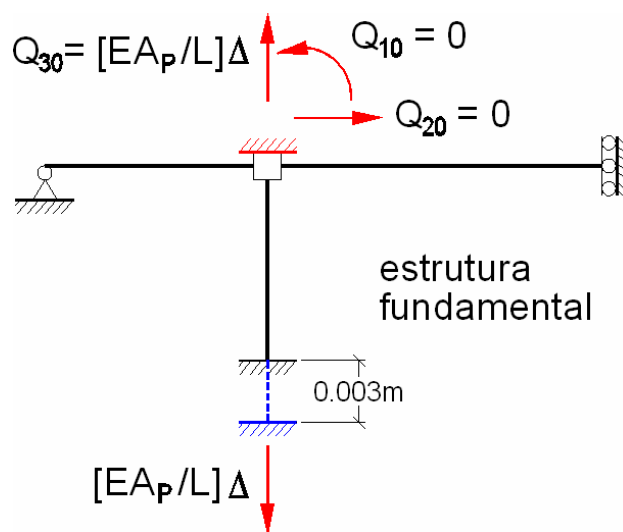


Resolução do Problema 2.1.5

a) Esforços para o caso de ocorrência de um assentamento de apoio no nó “D” de 3mm(↓).

O assentamento é entendido como sendo uma acção exterior, logo, relativamente ao problema 2.1.4, apenas temos de determinar os vectores $\{Q_0\}$ e $\{X_0\}$, recalculando-se posteriormente as equações de equilíbrio para a obtenção dos novos deslocamentos e esforços independentes.

A nova acção consiste nos efeitos da translação do pilar 3mm na vertical da qual resultam novas forças de fixação.



Como as barras tem deformabilidade axial, fixando-se o nó, o pilar irá “esticar”, resultando apenas numa força de fixação segundo d_3 :

$$Q_{10} = 0$$

$$Q_{20} = 0$$

$$Q_{30} = \frac{EA_p}{L} \Delta = \frac{2.7 \times 10^6}{3.50} 0.003 = 2314.29 \text{ kN}$$

Os esforços na fase 0, são apenas esforços axiais, os quais não fazem parte de $\{X_0\}$, logo:

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A equação do método será:

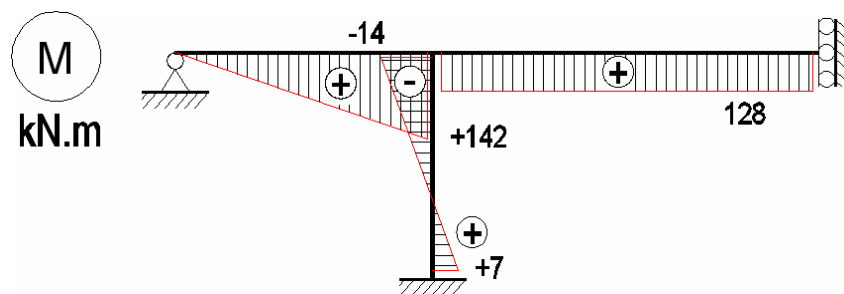
$$[K] \cdot \{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12.10 & 0.10 & -2.43 \\ 0.10 & 45.06 & 0 \\ -2.43 & 0 & 8.32 \end{bmatrix} \times 10^5 \times \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2314.29 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = -59.34 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ d_2 = 0.132 \times 10^{-5} \text{ m} \\ d_3 = -295.49 \times 10^{-5} \text{ m} \end{cases}$$

E os esforços serão:

$$\{X_f\} = [E] \cdot \{d\} + \{X_0\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 972000 & 0 & -243000 \\ -216000 & 0 & 0 \\ -216000 & 0 & 0 \\ -11571 & -9918 & 0 \\ 23143 & 9918 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -59.34 \\ 0.132 \\ -295.49 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 142 \\ 128 \\ 128 \\ 7 \\ -14 \end{Bmatrix}$$



b) Esforços para o caso de ocorrência de um assentamento de apoio no nó "D" de 3mm(↓) em simultâneo com o carregamento.

Neste caso podemos somar os vectores $\{Q_0\}$ e $\{X_0\}$ dos dois casos de carga:

$$\{Q_0\} = \begin{Bmatrix} 260 \\ 0 \\ 305 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2314.29 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 260 \\ 0 \\ 2619.29 \end{Bmatrix}$$

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} -100 \\ -360 \\ 180 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ -360 \\ 180 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equação do método:

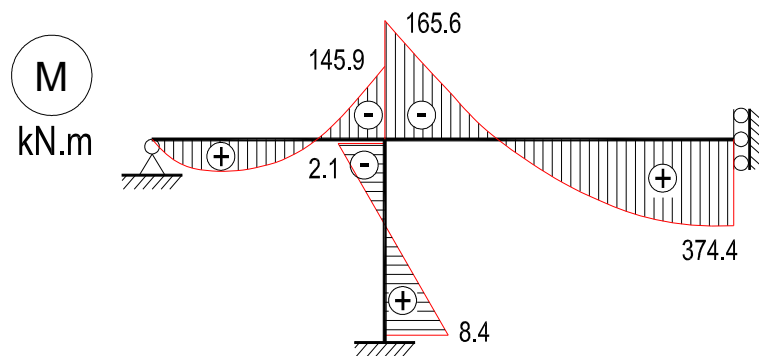
$$[K] \cdot \{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12.10 & 0.10 & -2.43 \\ 0.10 & 45.06 & 0 \\ -2.43 & 0 & 8.32 \end{bmatrix} \times 10^5 \times \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 260 \\ 0 \\ 2619.29 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = -90.0 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ d_2 = 20.0 \times 10^{-5} \text{ m} \\ d_3 = -341.1 \times 10^{-5} \text{ m} \end{cases}$$

Esforços:

$$\{X_f\} = [E] \cdot \{d\} + \{X_0\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 972000 & 0 & -243000 \\ -216000 & 0 & 0 \\ -216000 & 0 & 0 \\ -11571 & -9918 & 0 \\ 23143 & 9918 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -90.0 \\ 20.0 \\ -341.1 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} + \begin{Bmatrix} -100 \\ -360 \\ 180 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -145.9 \\ -165.6 \\ 374.4 \\ 8.43 \\ -2.1 \end{Bmatrix}$$



PROBLEMA 2.1.6

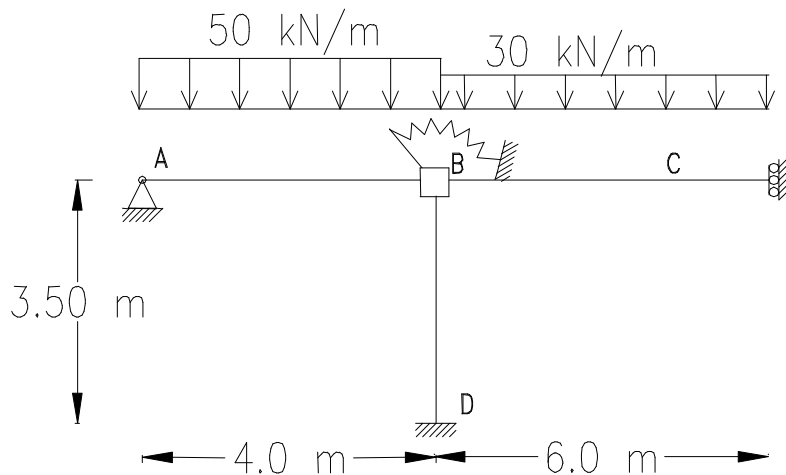
Trace o diagrama de momentos finais da estrutura seguinte.

$E=30 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$

Pilar: (0.30m x 0.30m)

Viga : (0.30m x 1.20m)

$k_{\text{mola}}= 2.0 \times 10^5 \text{ kN.m/rad.}$

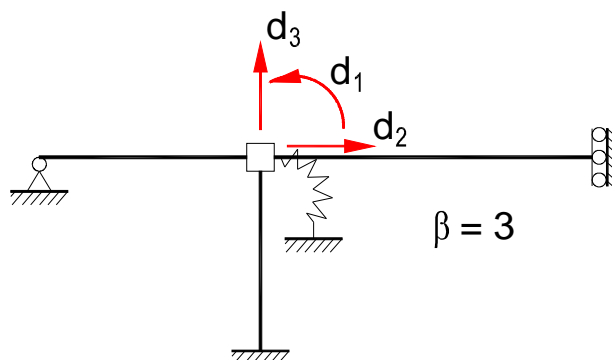


Resolução do Problema 2.1.6

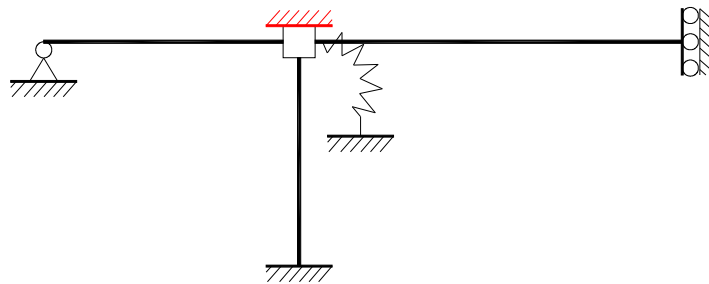
Verificamos que a estrutura é quase igual à da estrutura do Problema 2.1.3, diferindo apenas pelo facto de haver uma mola aplicada no nó B, que aumentará restrição deste à rotação (sem contudo o bloquear completamente). Vamos, no que possível, *aproveitar* os cálculos do referido problema identificando as diferenças. (Obviamente que, se o problema II.3 não existisse, teríamos de fazer o cálculo completo desta estrutura com a mola incluída.) O papel da mola é o de restringir a rotação do nó. Quanto maior for a rotação do nó “B”, maior será o momento que a mola faz actuar neste, sendo o seu valor $M_{\text{mola}} = k_{\text{mola}} \times \theta_B$.

Adoptando os deslocamentos nodais do problema 2.1.3, verificamos que a rotação θ_B coincide o deslocamento nodal independente d_1 .

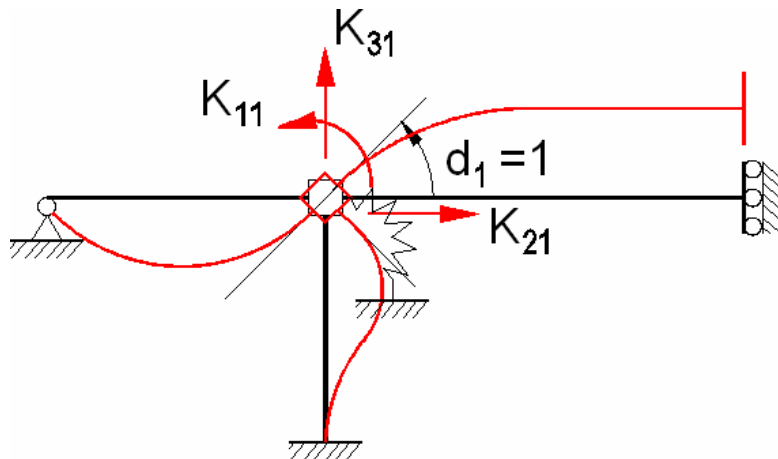
Deslocamento nodais:



Estrutura fundamental:



A mola apenas “afecta” o 1º modo:



$$k_{11} = \frac{3(EI)_V}{4} + \frac{4(EI)_P}{3.5} + \frac{(EI)_V}{6} + k_{mola} = 12.10 \times 10^5 + 2 \times 10^5 \text{ kN.m/rad}$$

$$k_{21} = \frac{6(EI)_P}{3.5^2} = 0.10 \times 10^5 \text{ kN/rad}$$

(a mola não interfere neste valor)

$$k_{31} = -\frac{3(EI)_V}{4^2} = -2.43 \times 10^5 \text{ kN/rad}$$

(a mola não interfere neste valor)

Mantém-se portanto os restantes termos da matriz de rigidez.

A matriz dos esforços [E], resulta de cada modo de deformação, cujas configurações dependem apenas das barras, a mola não interfere no valor dos elementos da matriz [E].

Assim, a eq. de equilíbrio será:

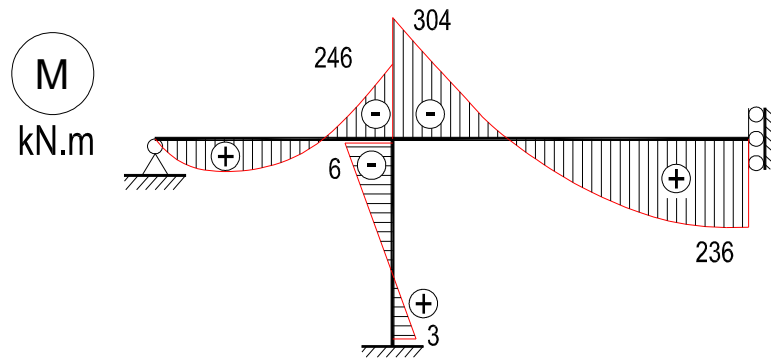
$$[K] \cdot \{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (12.10 + 2.00) & 0.10 & -2.43 \\ 0.10 & 45.06 & 0 \\ -2.43 & 0 & 8.32 \end{bmatrix} \times 10^5 \times \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 260 \\ 0 \\ 305 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = -26.09 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ d_2 = 0.06 \times 10^{-5} \text{ m} \\ d_3 = -44.39 \times 10^{-5} \text{ m} \end{cases}$$

Como se pode observar, a rotação do nó “B” (valor de d_1), é naturalmente menor do que no problema 2.1.3, visto que existe uma restrição adicional a este movimento por parte da mola.

Cálculo dos esforços:

$$\{X_r\} = [E] * \{d\} + \{X_0\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 972000 & 0 & -243000 \\ -216000 & 0 & 0 \\ -216000 & 0 & 0 \\ -11571 & -9918 & 0 \\ 23143 & 9918 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -26.09 \\ 0.06 \\ -44.39 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} + \begin{Bmatrix} -100 \\ -360 \\ 180 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -246 \\ -304 \\ 236 \\ 3 \\ -6 \end{Bmatrix}$$

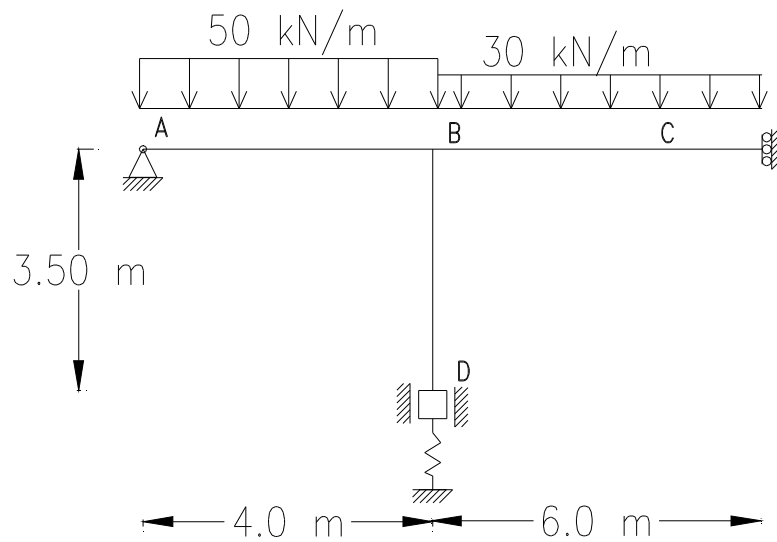


A reacção na mola é $M_{mola} = -k_{mola} \times \theta_B = -k_{mola} \times d_1 = -2 \times 10^5 \times -26.09 \times 10^{-5} = +52.18 \text{ kN.m}$.

(O momento reactivo aplicado ao nó é sempre contrário à rotação deste, pelo que tem de se afectar a expressão pelo sinal "-")

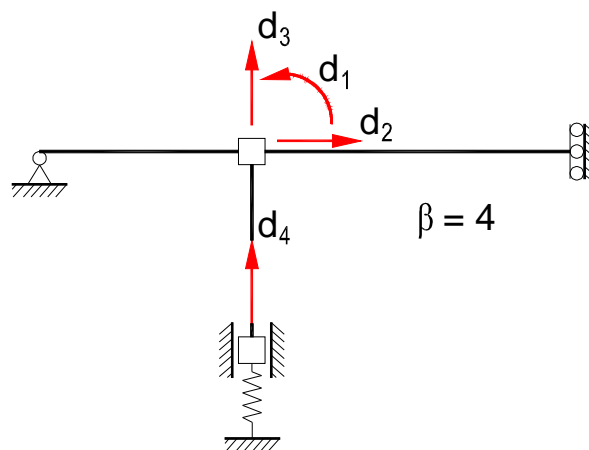
PROBLEMA 2.1.7

Determine os diagramas finais da seguinte estrutura. O apoio D é elástico vertical, simulando a reacção vertical do solo à estrutura, $k_{mola}=180 \times 10^3 \text{ kN/m}$. Os restantes dados correspondem aos do Problema 2.1.3.

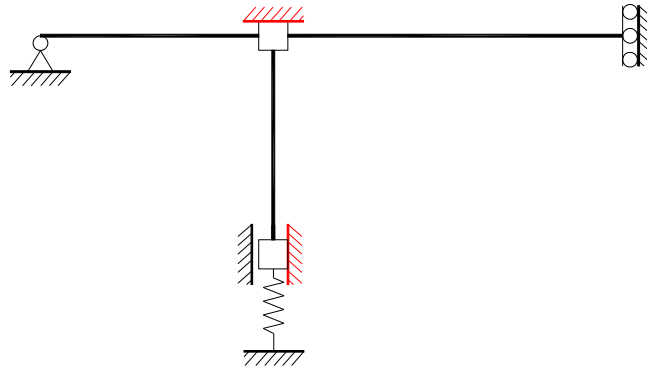


Resolução do Problema 2.1.7

Neste caso há um deslocamento independente adicional:

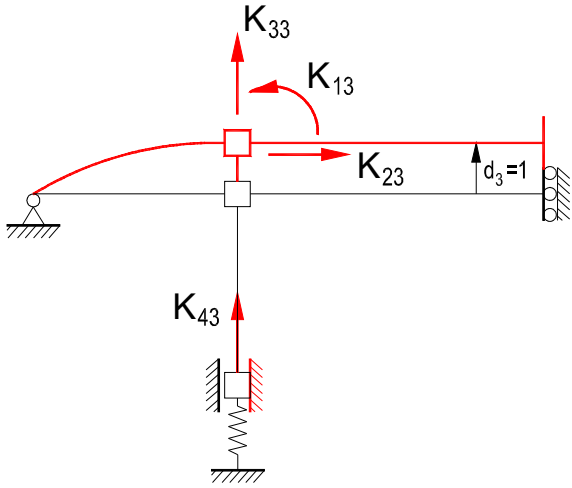


Estrutura fundamental:



	<p>1º MODO</p> $k_{11} = \frac{3(EI)_V}{4} + \frac{4(EI)_P}{3.5} + \frac{(EI)_V}{6} = 12.10 \times 10^5 \text{ kN.m/rad}$ $k_{21} = \frac{6(EI)_P}{3.5^2} = 0.10 \times 10^5 \text{ kN/rad}$ $k_{31} = -\frac{3(EI)_V}{4^2} = -2.43 \times 10^5 \text{ kN/rad}$ $k_{41} = k_{14} \text{ - determinar no 4º modo}$
--	--

	<p>2º MODO</p> $k_{12} = \frac{6(EI)_P}{3.5^2} = 0.10 \times 10^5 \text{ kN/m}$ $k_{22} = \frac{(EA)_V}{4} + \frac{(EA)_V}{6} + \frac{12(EI)_P}{3.5^3} = 45.06 \times 10^5 \text{ kN/m}$ $k_{32} = 0 \text{ kN/m}$ $k_{42} = k_{24} \text{ - determinar no 4º modo}$
--	---



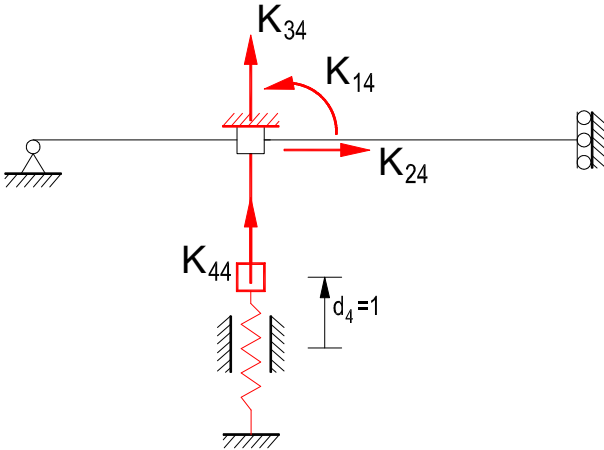
3º MODO

$$k_{13} = -\frac{3(EI)_V}{4^2} = -2.43 \times 10^5 \text{ kN.m/m}$$

$$k_{23} = 0 \text{ kN/m}$$

$$k_{33} = \frac{(EA)_p}{3.5} + \frac{3(EI)_V}{4^3} = 8.32 \times 10^5 \text{ kN/m}$$

$$k_{43} = k_{34} - \text{determinar no 4º modo}$$



4º MODO

$$k_{14} = 0 \text{ kN.m/m}$$

$$k_{24} = 0 \text{ kN/m}$$

$$k_{34} = -\frac{(EA)_p}{3.5} = -7.71 \times 10^5 \text{ kN/m}$$

$$k_{44} = \frac{(EA)_p}{L} + k_{mola} = \frac{2.7 \times 10^6}{3.5} + 0.180 \times 10^6 = 9.51 \times 10^5 \text{ kN/m}$$

A matriz de rigidez será:

$$[K] = \begin{bmatrix} 12.10 & 0.10 & -2.43 & 0 \\ 0.10 & 45.06 & 0 & 0 \\ -2.43 & 0 & 8.32 & -7.71 \\ 0 & 0 & -7.71 & 9.51 \end{bmatrix} \times 10^5$$

A matriz [E] vai ter mais uma coluna associada ao 4º modo. Como os esforços independentes são apenas momentos, esta será nula, visto que o 4º modo não introduz momentos na estrutura (apenas esforços normais).

O vector $\{X_0\}$ não tem qualquer alteração. Os vectores $\{Q\}$ e $\{Q_0\}$ ficam com mais um elemento, associado ao 4º grau de liberdade. Porém o seu valor é nulo porque não há cargas de vão que mobilizem Q_{40} , nem cargas nodais no sentido de d_4 .

Pode-se então obter os novos deslocamentos independentes:

$$\begin{aligned}
 & [K]^* \{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \begin{bmatrix} 12.10 & 0.10 & -2.43 & 0 \\ 0.10 & 45.06 & 0 & 0 \\ -2.43 & 0 & 8.32 & -7.71 \\ 0 & 0 & -7.71 & 9.51 \end{bmatrix} \times 10^5 \times \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 260 \\ 0 \\ 305 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = -67.44 \times 10^{-5} \text{ rad} \\ d_2 = 0.15 \times 10^{-5} \text{ m} \\ d_3 = -288.80 \times 10^{-5} \text{ m} \\ d_4 = -185.49 \times 10^{-5} \text{ m} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Cálculo dos esforços:

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 972000 & 0 & -243000 & 0 \\ -216000 & 0 & 0 & 0 \\ -216000 & 0 & 0 & 0 \\ -11571 & -9918 & 0 & 0 \\ 23143 & 9918 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -67.44 \\ 0.15 \\ -288.80 \\ -185.49 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} + \begin{Bmatrix} -100 \\ -360 \\ 180 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -199.50 \\ -214.3 \\ 325.7 \\ 7.8 \\ -15.6 \end{Bmatrix}$$

Obtidos os momentos nas secções extremas, momentos hiperestáticos, é fácil, barra a barra, determinar os esforços transversos hiperestáticos. Atendendo ao carregamento e vão calculam-se também os esforços isoestáticos, cuja adição aos hiperestáticos conduz aos esforços finais (ver problema 2.1.1).

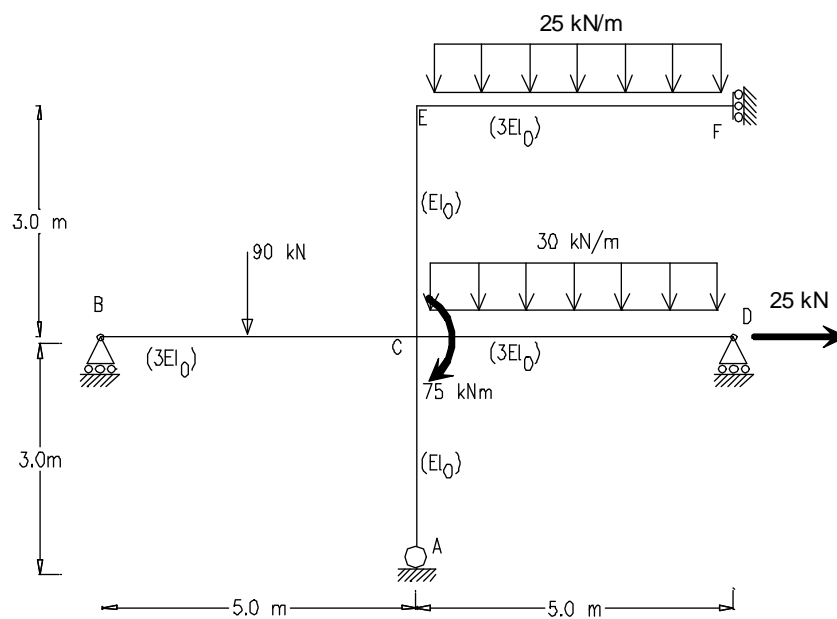
Por equilíbrio nó a nó, convertendo os esforços transversos em cargas nodais, calculam-se os esforços axiais totais.

Com base em toda esta informação, desenham-se os diagramas de esforços finais.

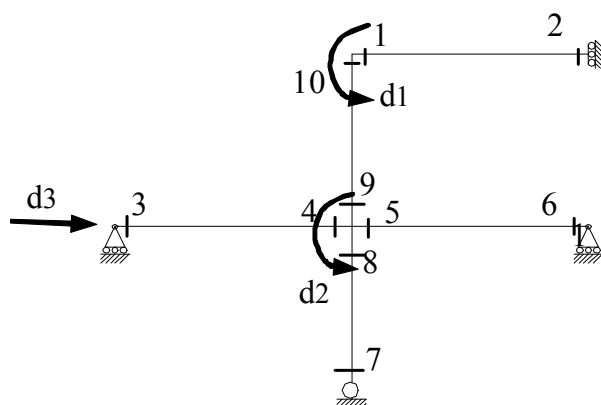
PROBLEMA 2.1.8

Vai resolver a estrutura pelo método dos deslocamentos admitindo que as barras são axialmente indeformáveis. São conhecidos os deslocamentos nodais independentes, a localização das secções críticas, a matriz de rigidez [K] e a de esforços [E].

- a) Desenhe a estrutura fundamental.
- b) Ocorre um assentamento de apoio vertical de 3 mm em A em simultâneo com as cargas aplicadas.
 - b.1) Calcule os esforços e desenhe o diagrama de momentos final
 - b.2) Qual o valor do deslocamento vertical em F ?



$E = 30\text{GPa}$, $I_0 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^4$

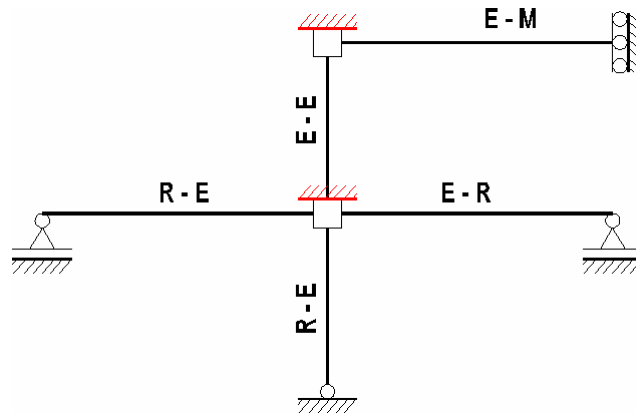


$$[K] = \begin{bmatrix} 29/15 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 89/15 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 5/9 \end{bmatrix} EI$$

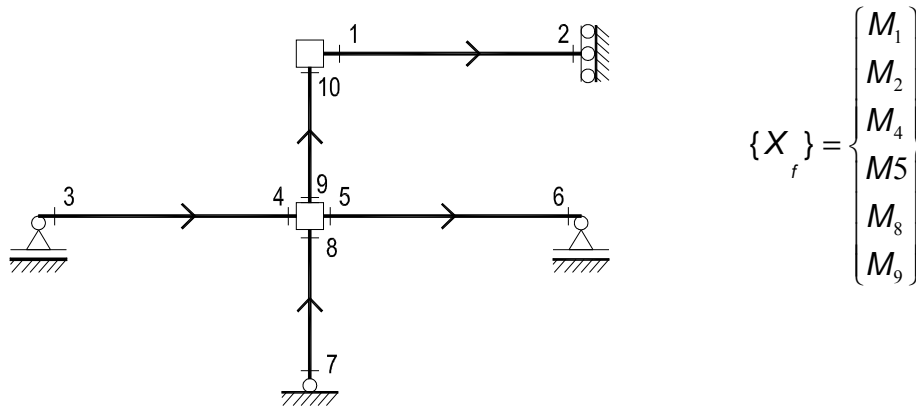
$$[E] = \begin{bmatrix} -3/5 & 0 & 0 \\ -3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 9/5 & 0 \\ 0 & -9/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & 2/3 \end{bmatrix} EI$$

Resolução do problema 2.1.8

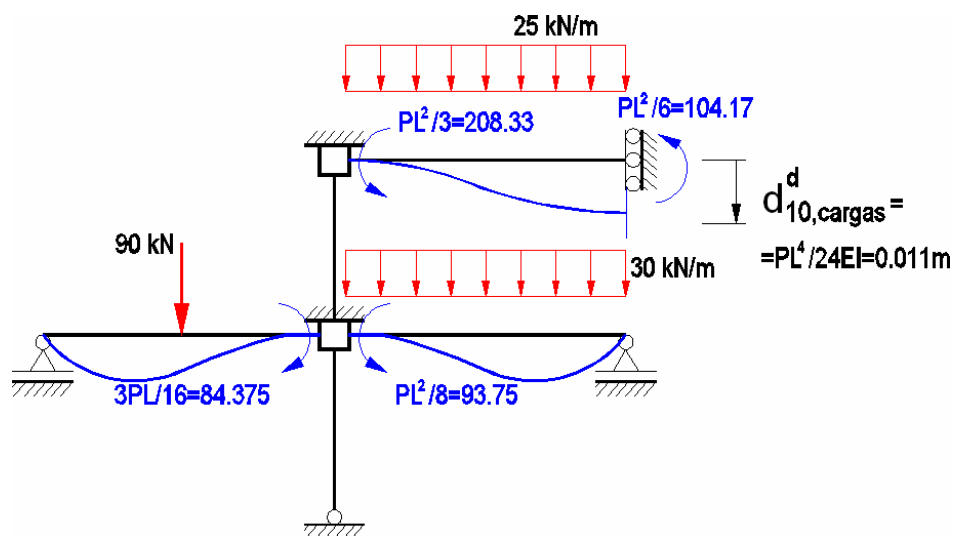
a) Estrutura fundamental:

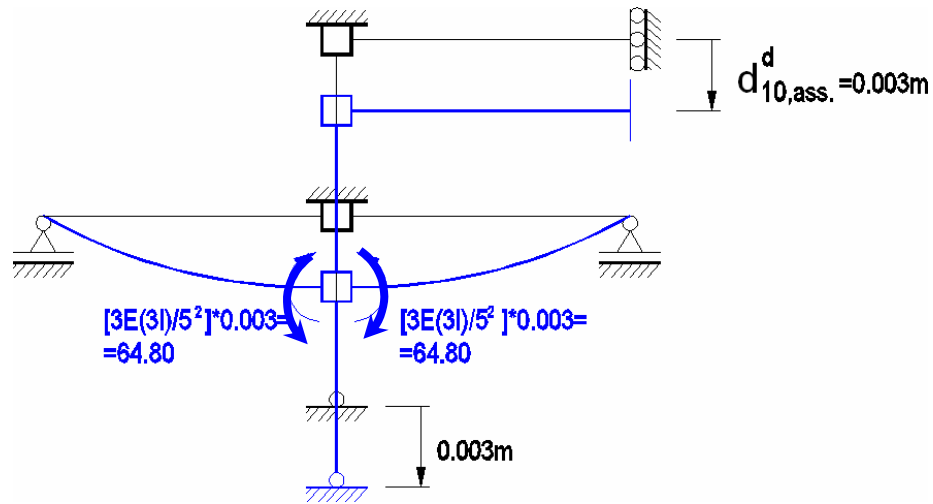


b.1) Discretização da Estrutura e vector dos esforços independentes:



Cálculo de $\{Q_0\}$ e $\{X_0\}$





Deslocamentos independentes

$$\{Q_0\} = \{Q_0, \text{cargas}\} + \{Q_0, \text{assentamento}\} \Leftrightarrow$$

$$\{Q_0\} = \begin{Bmatrix} \frac{pl^3}{3} \\ \frac{pl^2}{8} - \frac{3pl}{16} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3EI}{5^2} \cdot 0.003 - \frac{3EI}{5^2} \cdot 0.003 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 208.3 \\ 9.375 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{X_0\} = \{X_0, \text{cargas}\} + \{X_0, \text{assentamento}\} \Leftrightarrow$$

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} -\frac{pl^2}{3} \\ \frac{pl^2}{6} - \frac{3pl}{16} \\ -\frac{pl^2}{8} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3EI}{5^2} \cdot 0.003 \\ \frac{3EI}{5^2} \cdot 0.003 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -208.33 \\ 104.17 \\ -84.375 \\ -93.75 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 64.80 \\ 64.80 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -208.33 \\ 104.17 \\ -19.575 \\ -28.95 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{Q\} = \{Q, \text{cargas}\} + \{Q, \text{assentamento}\} \Leftrightarrow$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -75 \\ 25 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -75 \\ 25 \end{Bmatrix}$$

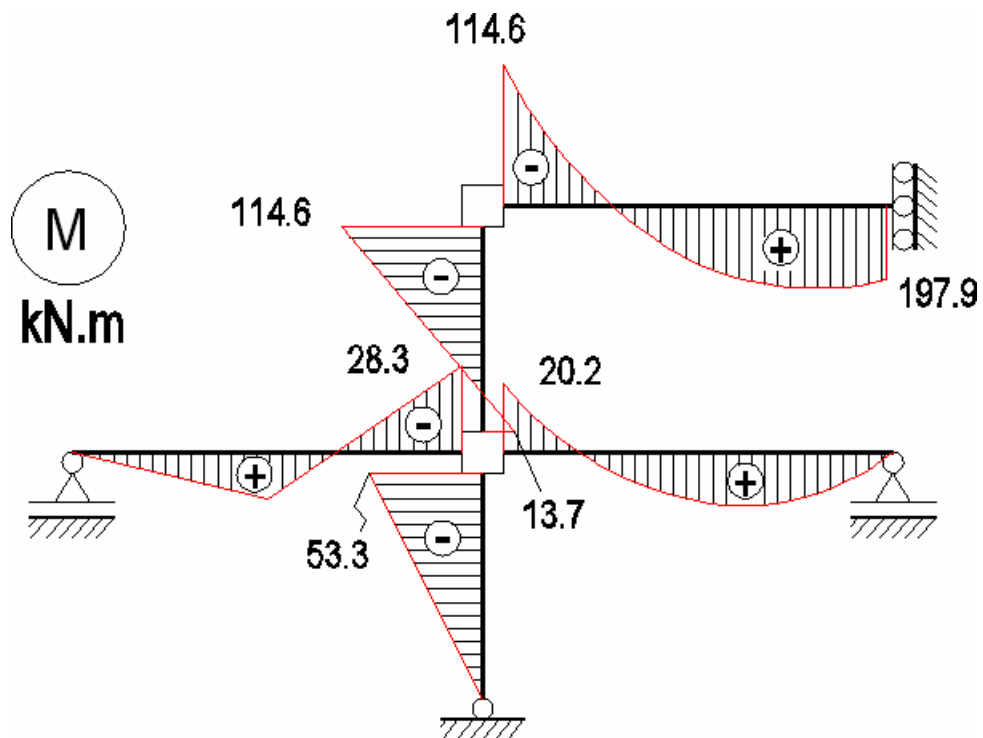
$$[K] \cdot \{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 116000 & 40000 & -40000 \\ 40000 & 356000 & -20000 \\ -40000 & -20000 & 33333 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 208.3 \\ 9.375 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -75 \\ 25 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = -2.603 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ d_2 = -0.081 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ d_3 = -2.422 \times 10^{-3} \text{ m} \end{cases}$$

Esforços

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_4 \\ M_6 \\ M_8 \\ M_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & 0 & 0 \\ -3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 9/5 & 0 \\ 0 & -9/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & 2/3 \end{bmatrix} \times EI \times \begin{Bmatrix} -2.603 \\ -0.081 \\ -2.422 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} + \begin{Bmatrix} -208.33 \\ 104.17 \\ -19.575 \\ -28.95 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -114.60 \\ 197.90 \\ -28.30 \\ -20.20 \\ -53.30 \\ 13.70 \end{Bmatrix}$$

Diagrama de momentos flectores:



b.2) Dos Modos de deformação (arbitrando-se como positivo, o deslocamento de cima para baixo):

$$[D] = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Do carregamento + assentamento:

$$d_0^d = d_{0,\text{carg } a}^d + d_{0,\text{ass.}}^d = \frac{pl^4}{24EI} + 0.003 = 0.01385m$$

Resulta:

$$\{d_F^d\} = [D]x\{d\} + \{d_0^d\} \Leftrightarrow \{d_F^d\} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} -2.603 \\ -0.081 \\ -2.422 \end{Bmatrix} x 10^{-3} + 0.01385 = 0.02035m$$

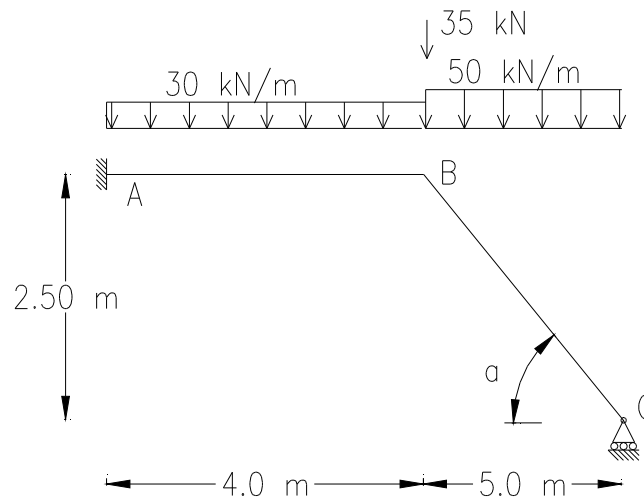
PROBLEMA 2.1.9

Despreze a deformabilidade axial das barras.

a) Desenhe os diagramas de momentos, esforços transversos e esforços axiais. Recorra ao Princípio dos Trabalhos Virtuais para determinar as forças de fixação necessárias, ou seja, os Q_{io} , e K_{ij} .

b) Qual o valor da flecha em B?

$$EI=1.253 \times 10^6 \text{ kNm}^2$$



Resolução do problema 2.1.9

Cálculos prévios:

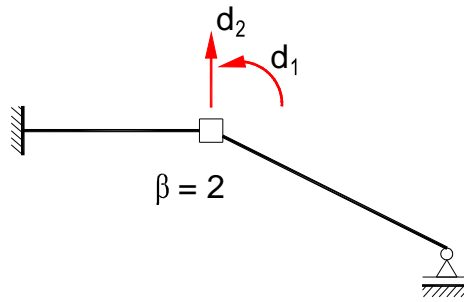
$$\alpha = 26.565$$

$$\cos \alpha = 0.894$$

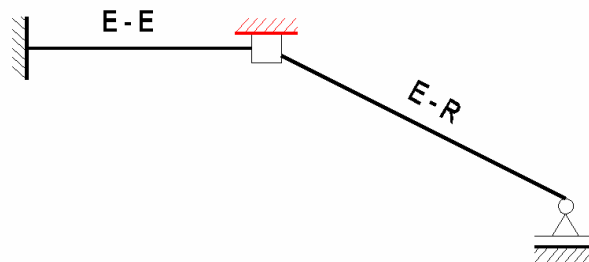
$$\sin \alpha = 0.447$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0.50$$

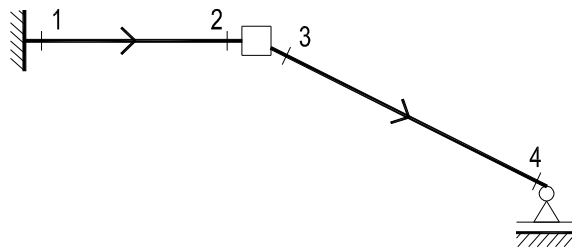
Deslocamentos independentes:



Estrutura fundamental:



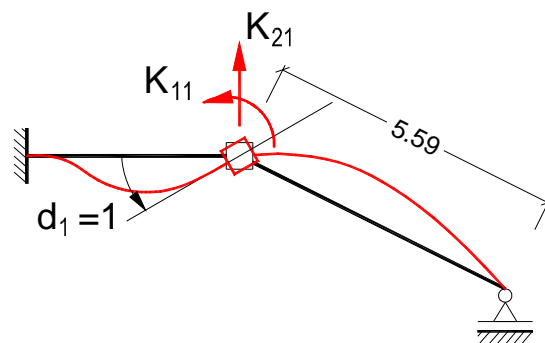
Discretização, escolha dos esforços independentes (secções críticas):

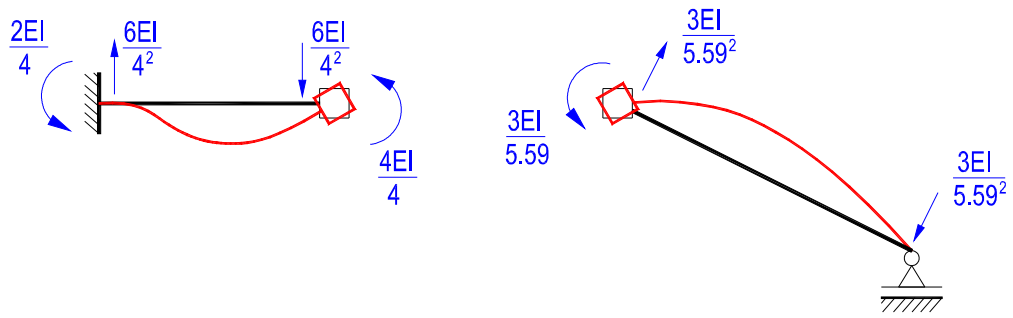


$$\{X_f\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

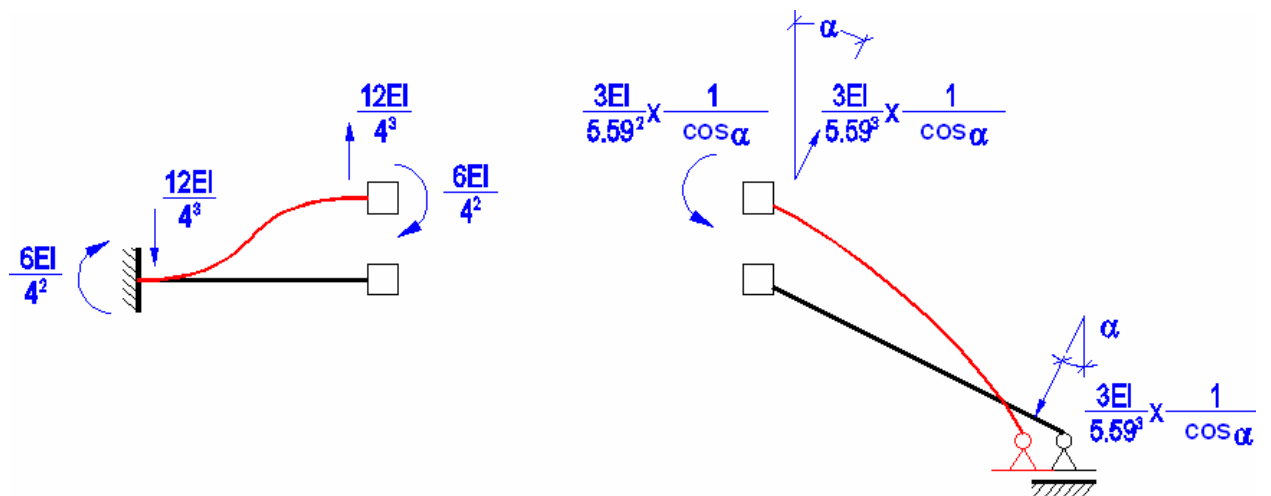
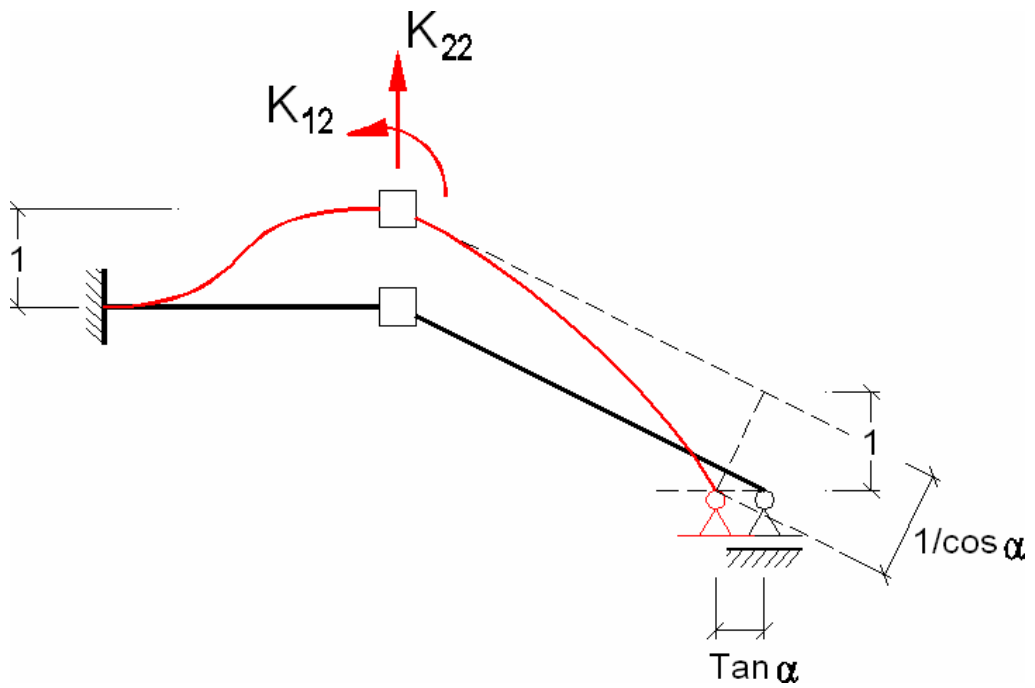
Modos de deformação:

Modo 1



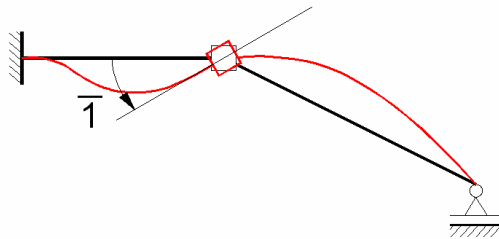


Modo 2

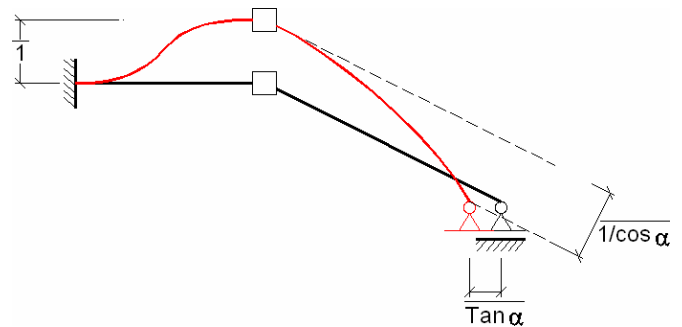


Diagramas de deslocamentos virtuais:

DDV1



DDV2



Coeficientes da matriz de rigidez:

$$K_{11} = \frac{4EI}{4} + \frac{3EI}{5.59} = 1.537EI = 1.925 \times 10^6, \text{ é obtido directamente.}$$

- para obter K_{21} é necessário multiplicar as forças e os esforços do modo 1, pelos deslocamentos virtuais do DDV2 e igualar o trabalho externo w_{ext} ao trabalho interno

w_{int} :

$$w_{ext} = w_{int} \Leftrightarrow k_{21} * 1 = w_{int} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_{21} = -\frac{6EI}{4^2} x \bar{1}(\uparrow) + \frac{3EI}{5.59^2} x \cos \alpha \bar{1}(\uparrow) + \frac{3EI}{5.59^2} x \sin \alpha \overline{\tan \alpha}(\leftarrow) = -0.268EI = -0.336 \times 10^6$$

- para obter K_{22} é necessário multiplicar as forças e esforços do modo 2, pelos deslocamentos virtuais do DDV2:

$$w_{ext} = w_{int} \Leftrightarrow k_{21} * 1 = w_{int} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_{21} = \frac{12EI}{4^3} x \bar{1}(\uparrow) + \frac{3EI}{5.59^3} x \frac{1}{\cos \alpha} x \cos \alpha \bar{1}(\uparrow) + \frac{3EI}{5.59^3} x \frac{1}{\cos \alpha} x \sin \alpha \overline{\tan \alpha}(\leftarrow) = 0.209EI = 0.262 \times 10^6$$

$$K_{12} = -\frac{6EI}{4^2} + \frac{3EI}{5.59^2} x \frac{1}{\cos \alpha} = -0.268EI = -0.336 \times 10^6$$

Matriz de rigidez:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.925 & -0.336 \\ -0.336 & 0.262 \end{bmatrix} \times 10^6$$

Matriz dos esforços independentes devidos aos modos de deformação:

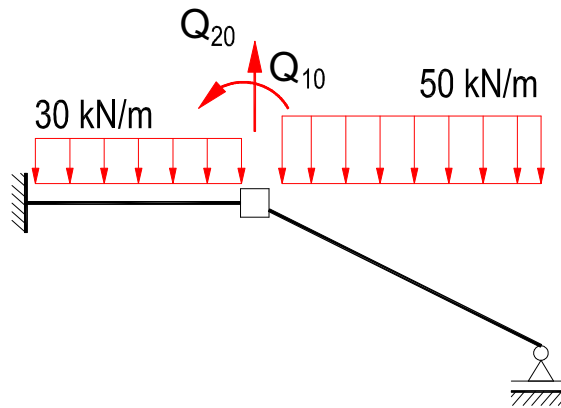
$$[E] = \begin{bmatrix} -\frac{2EI}{4} & \frac{6EI}{4^2} \\ \frac{4EI}{4} & -\frac{6EI}{4^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.375 \\ 1 & -0.375 \end{bmatrix} EI = \begin{bmatrix} -626500 & 469875 \\ 1253000 & -469875 \end{bmatrix}$$

Forças de fixação devidas a Cargas nodais:

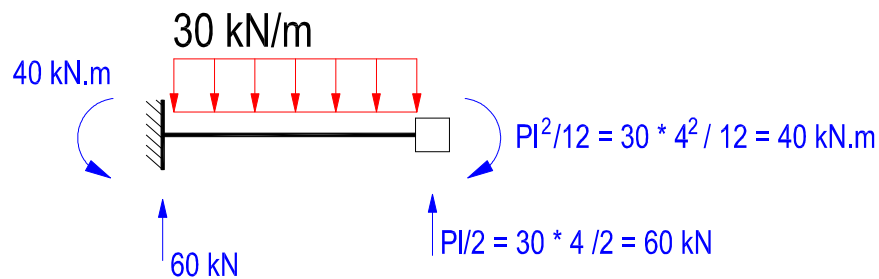
$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -35 \end{Bmatrix}$$

Nota: O elemento Q_i deste vector é o trabalho realizado por todas as forças nodais aplicadas durante o deslocamento virtual imposto em DDV_i .

Forças de fixação devidas a Cargas de vão:

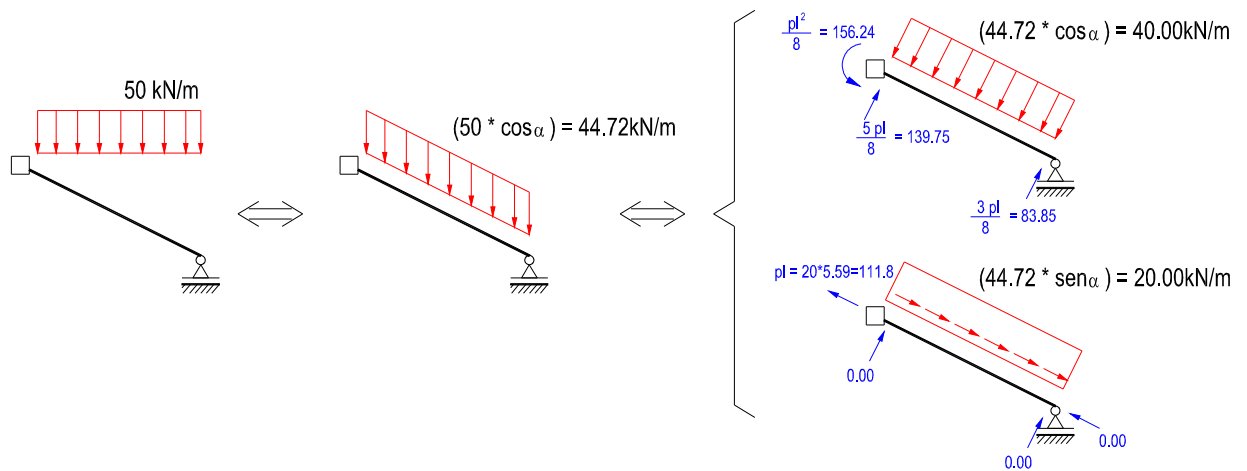


Barra AB



Barra BC

Nesta barra é necessário decompor o carregamento para as direcções transversal e normal à barra:



$Q_{10} = -40 + 156.24 = 116.24 \text{ kN.m}$, obtido directamente.

Q_{20} – usar o P.T.V. obtendo o trabalho virtual, multiplicando os esforços de fixação das cargas de vão pelos deslocamento no DDV2:

$$Q_{20} = 60 \cdot \bar{1} + 139.75 \cdot \cos \alpha \cdot \bar{1}(\uparrow) + 111.8 \cdot \sin \alpha \cdot \bar{1}(\uparrow) - 83.85 \cdot \sin \alpha \cdot \bar{1}(\rightarrow) = 216.25 \text{ kN}$$

$$\{Q_0\} = \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 116.24 \\ 216.26 \end{Bmatrix} \cdot 1$$

Esforços independentes devidos a Cargas de vão:

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40 \\ -40 \end{Bmatrix}$$

Cálculo dos deslocamentos independentes:

$$[K] \cdot \{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1.925 & -0.336 \\ -0.336 & 0.262 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 116.24 \\ 216.26 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -35 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} d_1 = -0.293 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ d_2 = -1.335 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{Bmatrix}$$

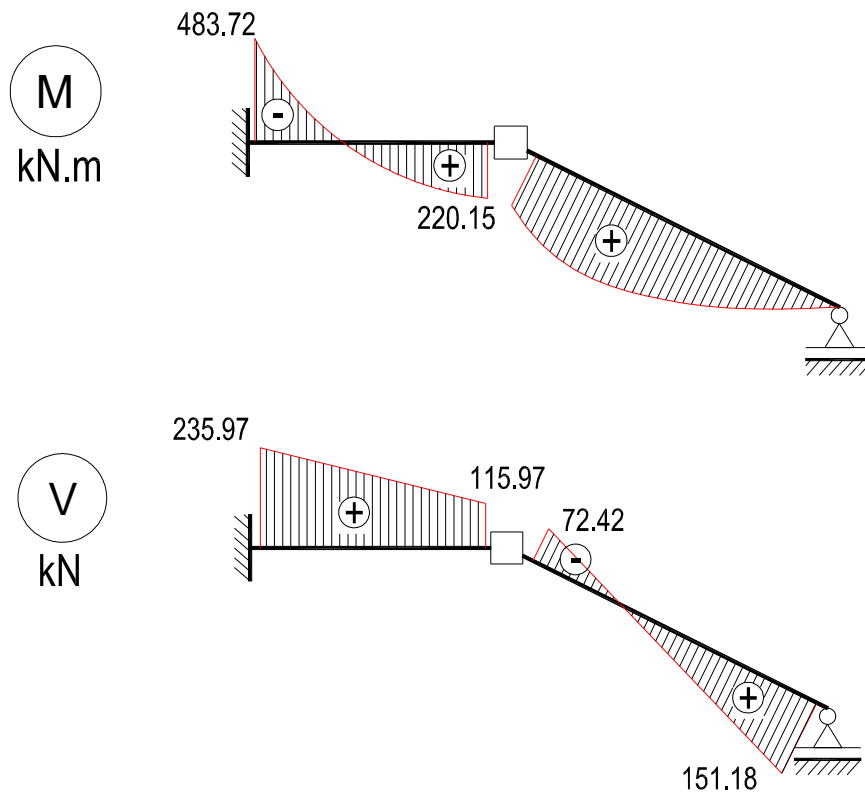
Cálculo dos esforços independentes:

$$\{X_f\} = [E] * \{d\} + \{X_0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -626500 & 469875 \\ 1253000 & -469875 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} -0.293 \times 10^{-3} \\ -1.335 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -40 \\ -40 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -443.72 - 40 = -483.72 \text{ kN.m} \\ 260.15 - 40 = 220.15 \text{ kN.m} \end{Bmatrix}$$

Diagramas de esforços:



$$V_1 = \frac{220.15 - (-483.72)}{4} + \frac{30 * 4}{2} = 235.97 \text{ kN}$$

$$V_2 = -30 * 4 + 235.97 = 115.97 \text{ kN}$$

$$V_3 = \frac{0 - 220.15}{5.59} + \frac{40 * 5.59}{2} = 72.42 \text{ kN}$$

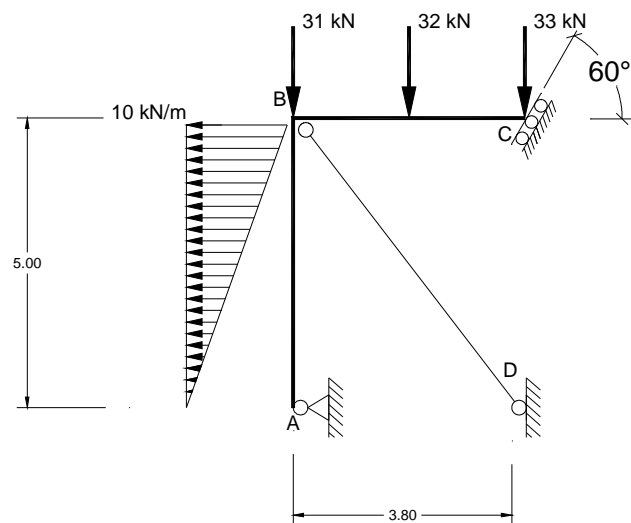
$$V_4 = -40 * 5.59 + 72.42 = -151.18$$

PROBLEMA 2.1.10

Recorrendo ao método dos deslocamentos e sabendo que a estrutura da figura é sujeita ao carregamento indicado:

- Determine o grau de indeterminação cinemática da estrutura;
- Monte a matriz de rigidez, os vectores de forças nodais e os vectores dos esforços nas secções;
- Monte o vector de esforços independentes sabendo que pretende desenhar o diagrama de momentos flectores.

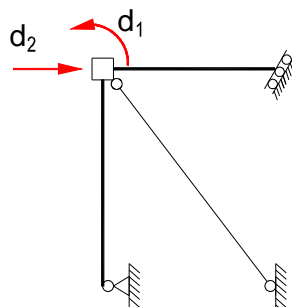
(Recorra ao princípio dos trabalhos virtuais sempre que achar necessário)



Barra	EI	EA
A-B	15 000	∞
B-C	15 000	∞
B-D	0	50 000

Resolução do problema 2.1.10

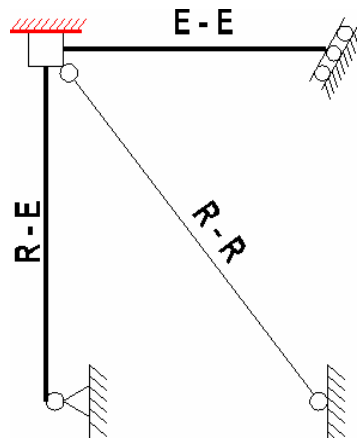
a) Deslocamentos independentes:



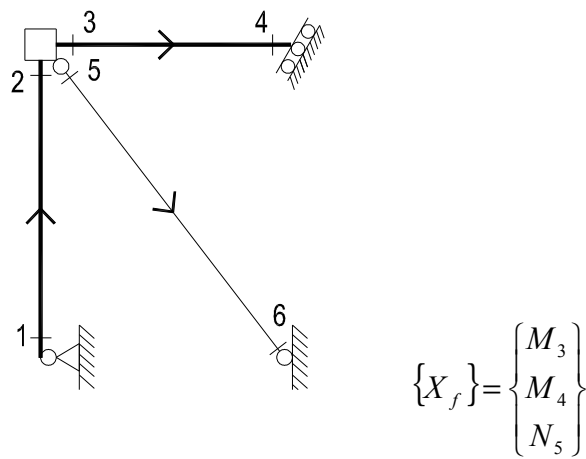
$L_{BD} = 6.28m$

Grau de indeterminação estática $\beta = 2$

Estrutura fundamental:

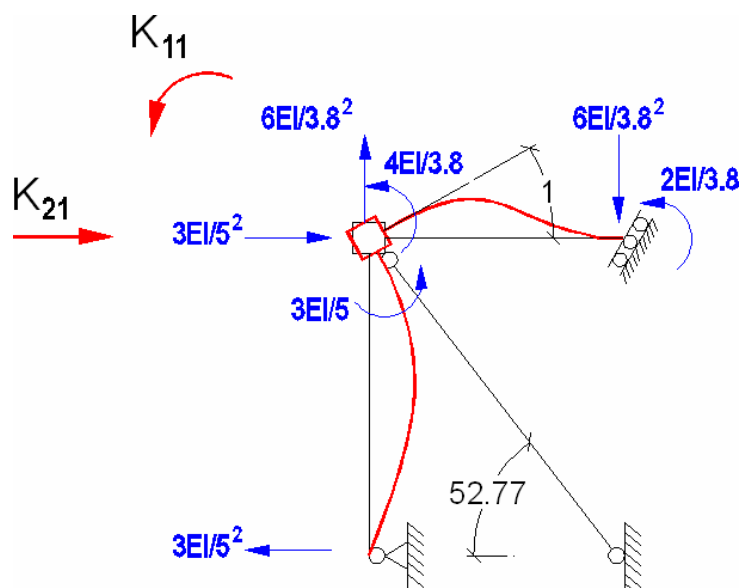


b) Discretização da estrutura, vector de esforços independentes:

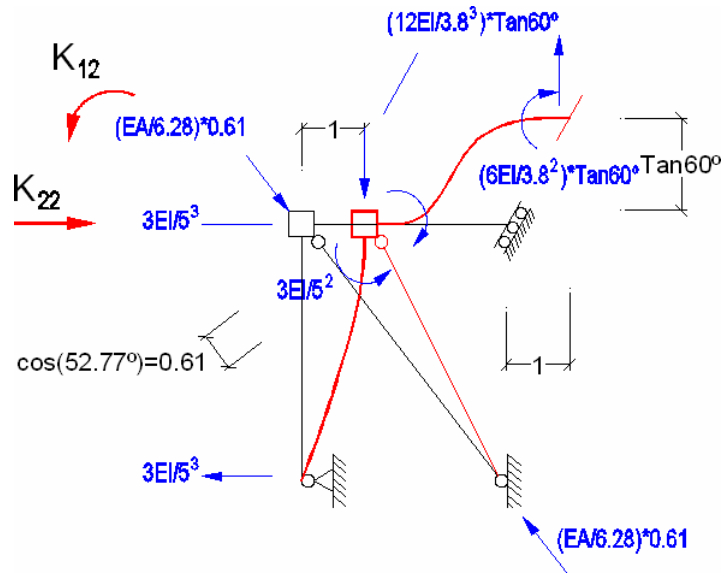


c) Modos de deformação:

Modo 1



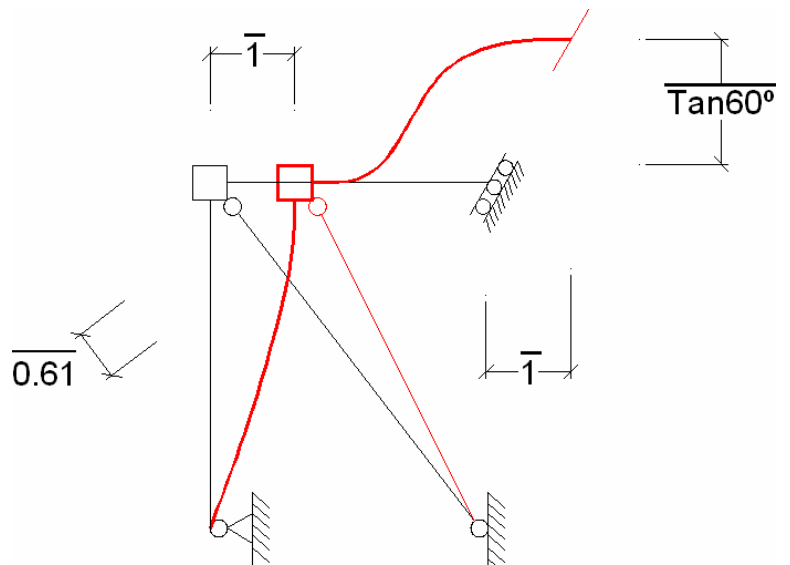
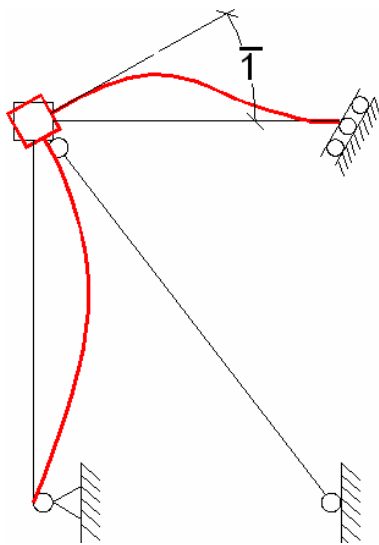
Modo 2



Diagramas de deslocamentos virtuais:

DDV1

DDV2



Matriz de rigidez:

Do 1º modo:

$$K_{11} = \frac{3EI}{5} + \frac{4EI}{3.8} = 24789.47$$

$$K_{21} * \bar{1} = \frac{3EI}{5^2} * \bar{1} - \frac{6EI}{3.8^2} * \overline{\tan 60} = -8995.33$$

Do 2º modo:

$$K_{12} = \frac{3EI}{5^2} - \frac{6EI}{3.8^2} * \tan 60 = -8995.33$$

$$K_{22} = \frac{3EI}{5^3} * \bar{1} + \left(\frac{12EI}{3.8^3} * \tan 60 \right) * \overline{\tan 60} + \left(\frac{EA}{6.28} * 0.61 \right) * \overline{0.61} = 13163.66$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 24789.47 & -8995.33 \\ -8995.33 & 13163.66 \end{bmatrix}$$

Matriz dos esforços independentes devidos aos modos de deformação:

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{-4EI}{3.8} & \frac{+6EI}{3.8^2} \tan 60 \\ \frac{2EI}{3.8} & -\frac{6EI}{3.8^2} \tan 60 \\ 0 & -\frac{EA}{6.28} 0.61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15789 & 10795 \\ 7895 & -10795 \\ 0 & -4857 \end{bmatrix}$$

Forças de fixação devidas a cargas nodais:

Q_1 e Q_2 são iguais ao trabalho realizado pelas cargas aplicadas nos nós quando se impõe respectivamente deslocamentos virtuais unitários nas direcções d_1 e d_2 .

Do diagrama DDV1:

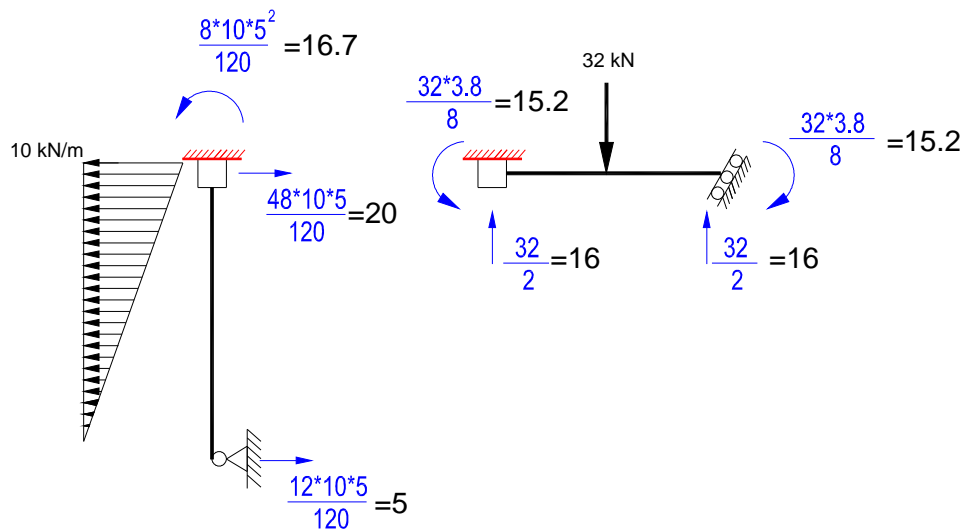
$$Q_1 * \bar{1} = 31 * 0 + 33 * 0$$

Do diagrama DDV2:

$$Q_2 * \bar{1} = 31 * \bar{0} - 33 * \overline{\tan 60} = -55.16$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -55.16 \end{Bmatrix}$$

Forças de fixação devidas a cargas de vão:



Do diagrama DDV1:

$$Q_{10} \cdot \bar{1} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 5^2}{120} \cdot \bar{1} + \frac{32 \cdot 3.8}{8} \cdot \bar{1} = 31.87 \text{ kN.m}$$

Do diagrama DDV2:

$$Q_{20} \cdot \bar{1} = \frac{48 \cdot 10 \cdot 5}{120} \cdot \bar{1} + \frac{32}{2} \cdot \overline{\tan 60} = 47.71 \text{ kN}$$

$$\{Q_0\} = \begin{Bmatrix} 31.87 \\ 47.71 \end{Bmatrix}$$

Esforços devidos a cargas de vão:

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} M_{03} \\ M_{04} \\ N_{05} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{32 \cdot 3.8}{8} \\ -\frac{32 \cdot 3.8}{8} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15.2 \\ -15.2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

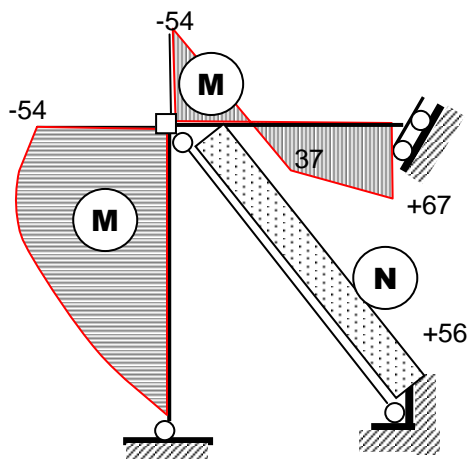
Cálculo dos deslocamentos independentes:

$$\begin{bmatrix} 24789.47 & -8995.33 \\ -8995.33 & 13163.66 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 31.87 \\ 47.71 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -55.16 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0055 \text{ rad} \\ -0.0116 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Esforços independentes:

$$\begin{Bmatrix} M_3 \\ M_4 \\ N_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -15789 & 10795 \\ 7895 & -10795 \\ 0 & -4857 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} -0.0055 \\ -0.0116 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -15.2 \\ -15.2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -54 \text{ kN.m} \\ 67 \text{ kN.m} \\ 56 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$



ANÁLISE DE ESTRUTURAS II

Parte 2 – Método dos Deslocamentos

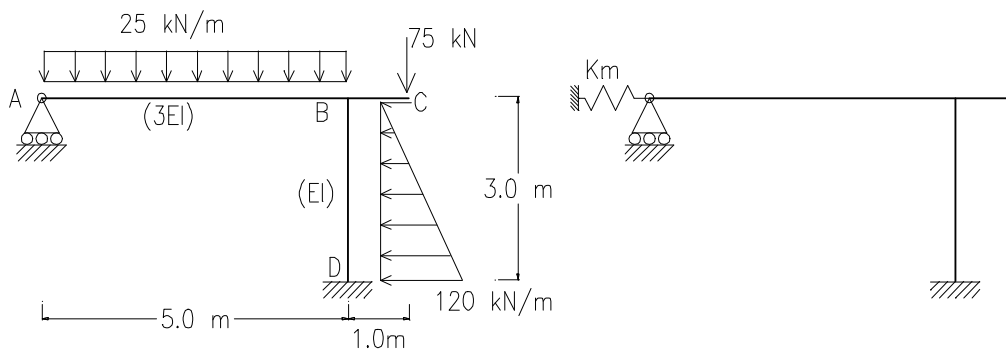
Capítulo 2.2 – Exercícios Propostos

PROBLEMA 2.2.1

Vai resolver a estrutura pelo método dos deslocamentos supondo que as barras são axialmente indeformáveis.

- Identifique os deslocamentos nodais independentes e desenhe a estrutura fundamental.
- Determine a matriz de rigidez
- Determine os vectores $\{Q_0\}$ e $\{Q\}$
- Qual o deslocamento horizontal de A.
- Determine o momento na secção de topo da barra DB.
- Foi entretanto colocada uma mola no ponto A que trabalha no sentido horizontal. Determine a rigidez que essa mola deverá ter de modo a que o momento na secção de topo da barra DB seja nulo.

$$EI = 50000 \text{ kNm}^2$$

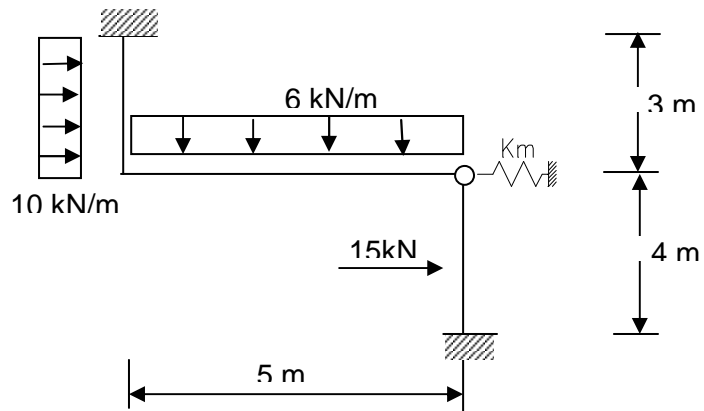


PROBLEMA 2.2.2

As barras são axialmente indeformáveis. Determine a matriz de rigidez $[K]$ e o vector de forças $\{Q_0\}$ recorrendo ao P.T.V.

$EI = 45000 \text{ kNm}^2$

$K_m = 2000 \text{ kNm}^{-2}$

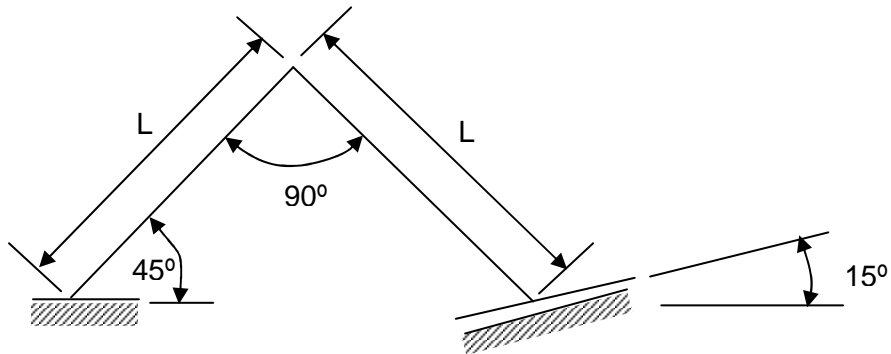


PROBLEMA 2.2.3

Determine a matriz de rigidez da seguinte estrutura supondo que as barras são axialmente indeformáveis e recorrendo à técnica de mudança de base.

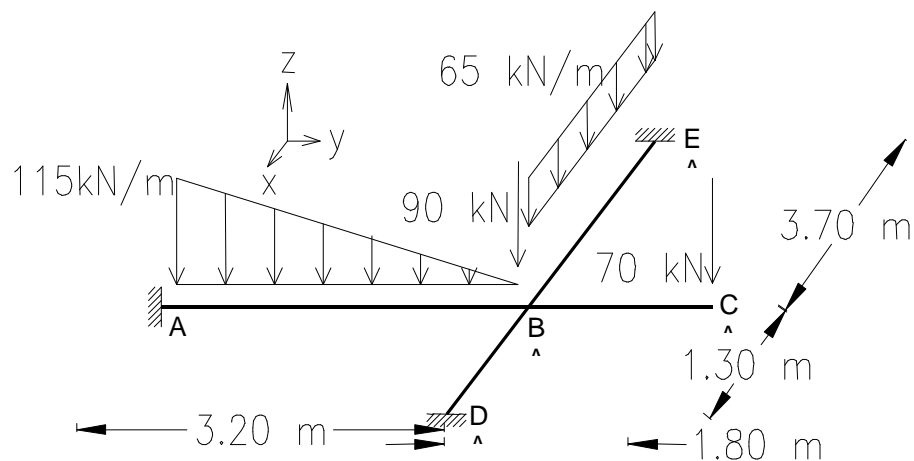
$$EI = 4000 \text{ kNm}^2$$

$$L = 5\text{m}$$



PROBLEMA 2.2.4

Dada a grelha em betão armado sujeita às acções mostradas determine e desenhe os diagramas de momentos flectores e momentos torçores. Admita que o factor de rigidez à torção da secção de betão é 10% do factor de rigidez à torção elástico.



Barra	b (m)	h (m)
AC	0.25	0.40
DE	0.30	0.50

$E = 30 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ $\nu = 0.15$

PROBLEMA 2.2.5

Vai recorrer ao método de Cross para resolver a seguinte estrutura.

1) Admita a estrutura completa isto é de A a E

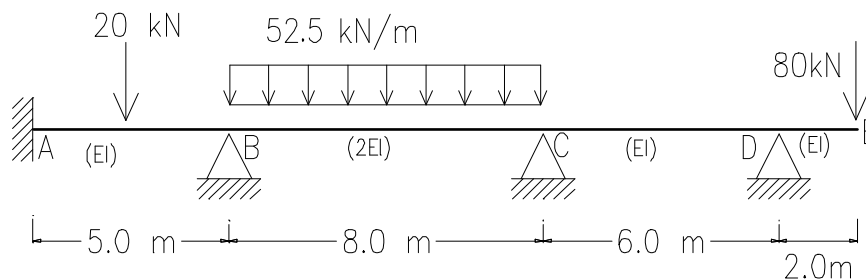
1.a) Determine os momentos finais e desenhe o respectivo diagrama devido às cargas actuantes.

1.b) Determine os momentos finais e desenhe o respectivo diagrama devido às cargas actuantes em simultâneo com um assentamento de 3mm (de cima para baixo) no apoio C.

1.c) Em relação à alínea 1.a) indique qual a rotação sofrida pelo nó B.

($EI = 35000 \text{ kNm}^2$)

2) Admita que agora simplifica a estrutura retirando a consola DE e substituindo-a por um momento e um esforço transversal aplicado à secção direita da barra CD. Responda novamente à questão 1.b).



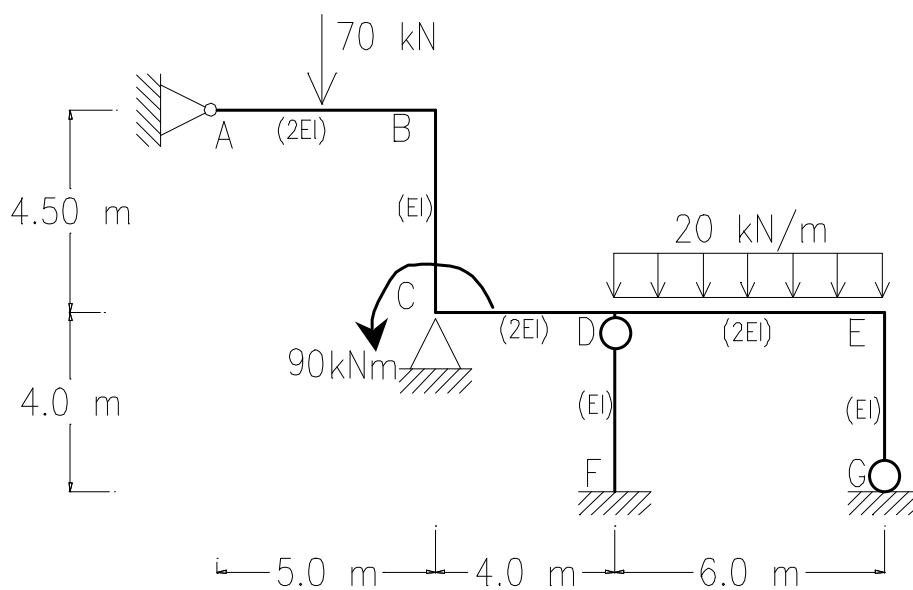
PROBLEMA 2.2.6

a) Calcule os momentos finais e esboce o diagrama respectivo quando a estrutura está sujeita ao carregamento mostrado e a uma variação uniforme de temperatura de $35\text{ }^{\circ}\text{C}$.

(Nota: De modo a não alongar muito o tempo de cálculo, não itere mais do que três vezes em cada nó ou admita um erro de 0.5 kNm)

b) Qual a rotação do nó C ?

($EI = 50000\text{ kNm}^2$; $\alpha = 10^{-5}\text{ }/^{\circ}\text{C}$)



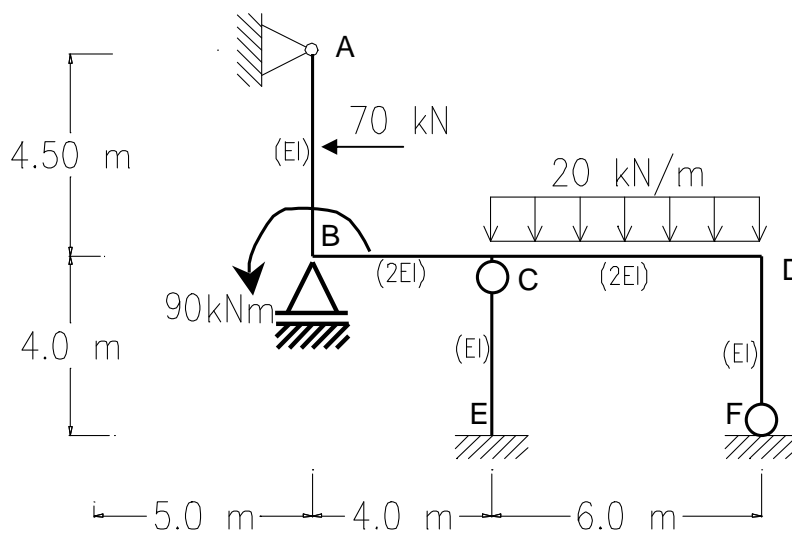
PROBLEMA 2.2.7

a) Calcule os momentos finais e esboce o diagrama respectivo quando a estrutura está sujeita ao carregamento mostrado e a uma variação uniforme de temperatura de 35 °C na viga BD.

(Nota: De modo a não alongar muito o tempo de cálculo, não itere mais do que três vezes em cada nó ou admita um erro de 0.5 kNm)

b) Qual a rotação do nó B ?

($EI = 50000 \text{ kNm}^2$; $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$)



ANÁLISE DE ESTRUTURAS II

Parte 2 – Método dos Deslocamentos

Capítulo 2.3 – Problemas de Exames

PROBLEMA 2.3.1

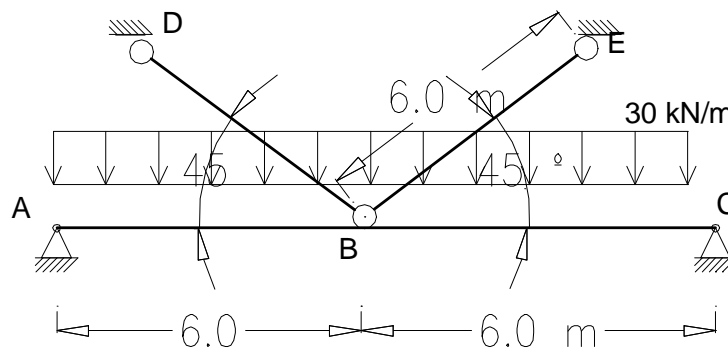
Considere para a estrutura dada que:

Barra ABC : $EA = \infty$ kN, $EI = 10^6$ kNm²

Tirantes DB e EB : $EA = 0.4 \times 10^6$ kN, $EI = EI = 0$ kNm²

Determine e defina:

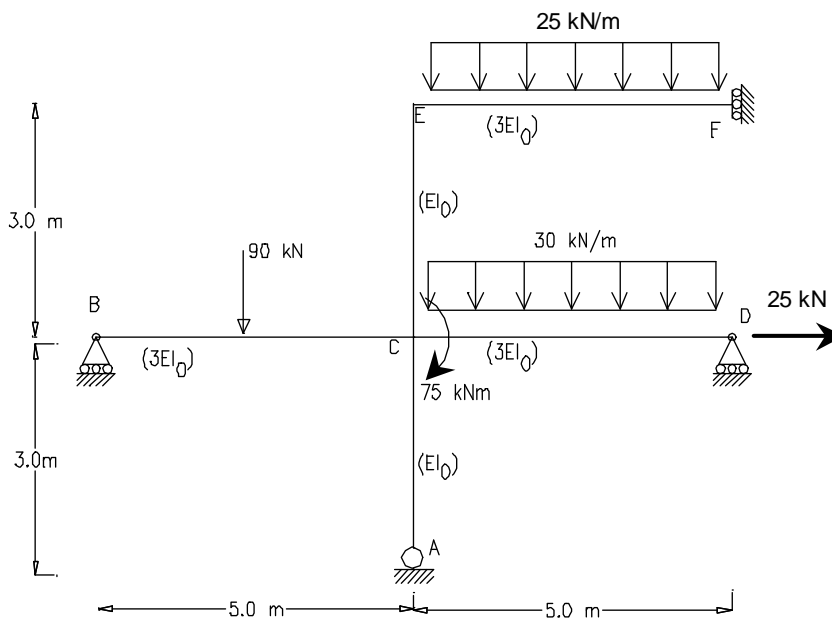
- Estrutura base (fundamental) e deslocamentos independentes
- Matriz de rigidez
- Matriz de forças nodais de fixação devidas às acções de vão.



PROBLEMA 2.3.2

Vai resolver a estrutura pelo método dos deslocamentos admitindo que as barras são axialmente indeformáveis.

- Defina grau de indeterminação cinemática de uma a estrutura. Determine-o. Desenhe a estrutura fundamental.
- Monte a matriz de rigidez. Monte os vectores Q e Q_0 .
- Determine os momentos finais e desenhe-os num diagrama.
- Ocorre um assentamento de apoio vertical de 3 mm em A em simultâneo com as cargas aplicadas. Qual o valor do deslocamento vertical em F ?



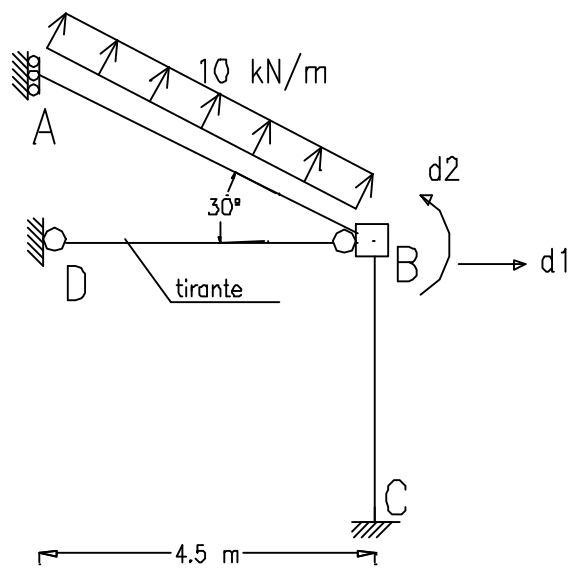
$E = 30\text{GPa}$, $I_0 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^4$

PROBLEMA 2.3.3

Os deslocamentos nodais independentes e as características das barras estão mostrados na figura.

Recorrendo ao PTV determine:

- a) O elemento Q_{10} . Qual o seu significado?
- b) Os coeficientes K_{22} e K_{12} .



$E=210 \text{ GPa}$

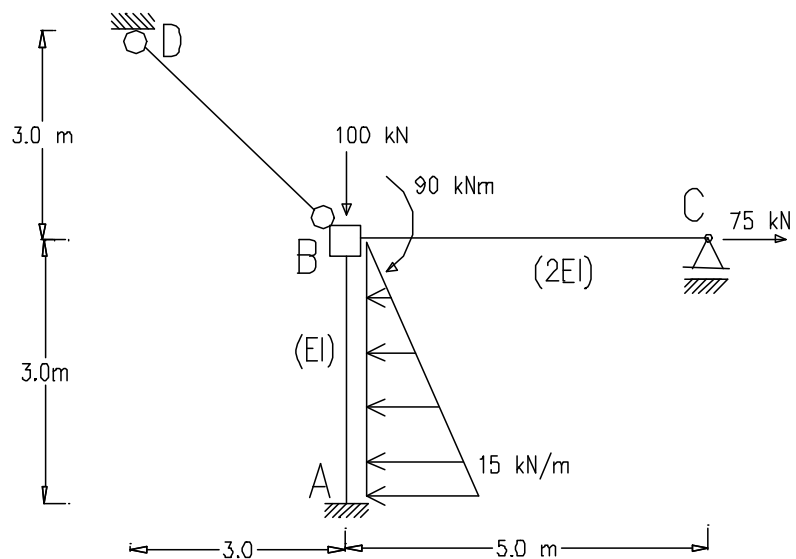
Barra	Área (m^2)	Inércia (m^4)
AB	∞	16×10^{-6}
BC	∞	16×10^{-6}
DB	5×10^{-4}	0

PROBLEMA 2.3.4

Vai resolver a estrutura pelo Método dos Deslocamentos. As barras AB e BC são axialmente indeformáveis.

- Monte a matriz de rigidez da estrutura. Indique qual o significado dos coeficientes dessa matriz.
- Monte o vector $\{Q_0\}$ recorrendo ao P.T.V.
- Calcule e esboce o diagrama de momentos finais (nos cálculos deverá indicar explicitamente qual o vector de esforços independentes, $\{X\}$ que adoptou).
- Qual o deslocamento horizontal da viga ?
- Qual a rotação do nó C?
- Qual o vector $\{Q_0\}$ associado ao assentamento de apoio em A de 3 mm, em simultâneo com a carga aplicada ?

$EI = 6525 \text{ kNm}^2$
 $EA = 0.5 \times 10^6 \text{ kN}$



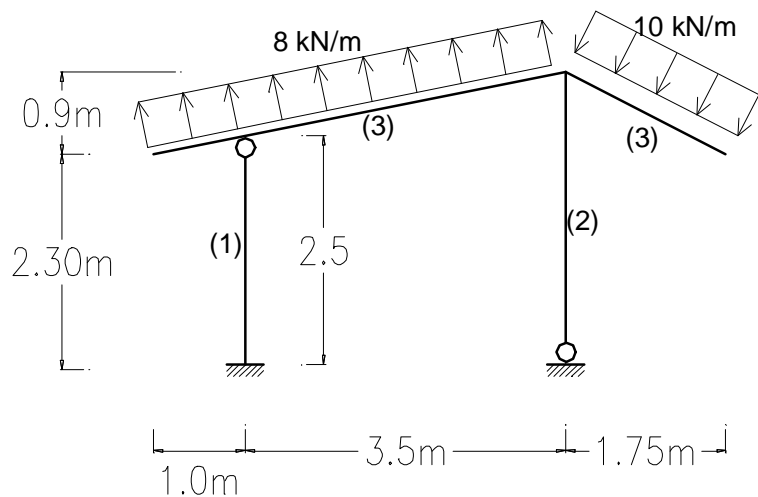
PROBLEMA 2.3.5

Vai resolver a estrutura pelo Método dos Deslocamentos atendendo aos valores do quadro anexo.

- Simplifique a estrutura
- Qual o valor de β ?. Desenhe a estrutura fundamental.
- Desenhe os modos de deformação independentes existentes.
- Calcule os coeficientes da matriz de rigidez. Qual o significado de k_{12} ?
- Calcule o vector $\{Q_0\}$.

$E = 30 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$; $EA = \infty$

Barra	$I(\text{m}^4)$
1	675×10^{-6}
2	325×10^{-6}
3	1600×10^{-6}



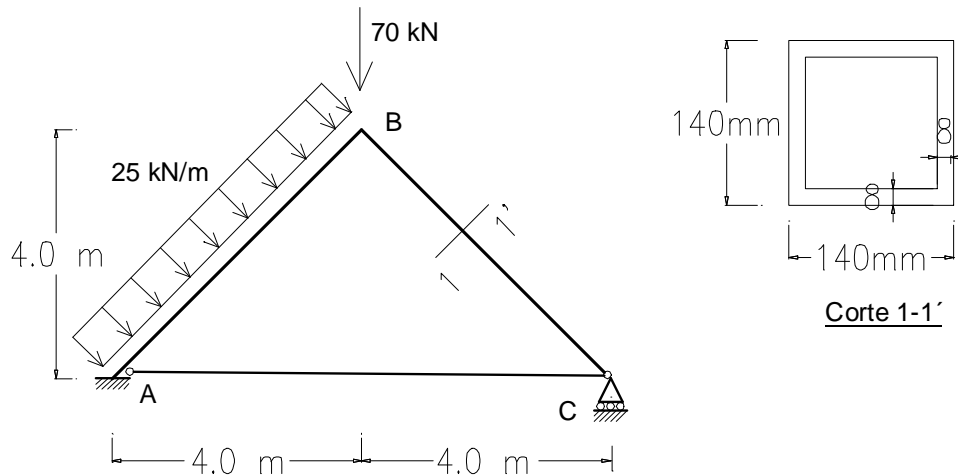
PROBLEMA 2.3.6

A estrutura mostrada na figura é constituída por duas barras AB e BC de secção quadrada e oca como se mostra no corte 1-1' cujo material tem o seguinte módulo de elasticidade $E=210 \text{ GPa}$, e que para efeito destes cálculos se consideram tais barras axialmente indeformáveis.

Posteriormente foi colocado um tirante AC do mesmo material mas de secção desconhecida.

- Supondo a inexistência do tirante AC determine o deslocamento do nó C.
- Dimensione a secção do tirante de modo a que o deslocamento anterior se reduza a $1/5$.

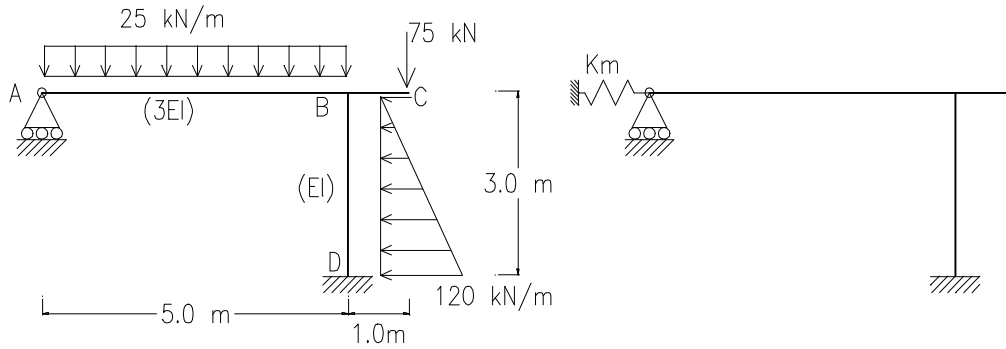
- c) Para a situação das alíneas a) e b) esboce os diagramas de momentos flectores.
 d) Qual o esforço axial instalado no tirante no caso b) ?



PROBLEMA 2.3.7

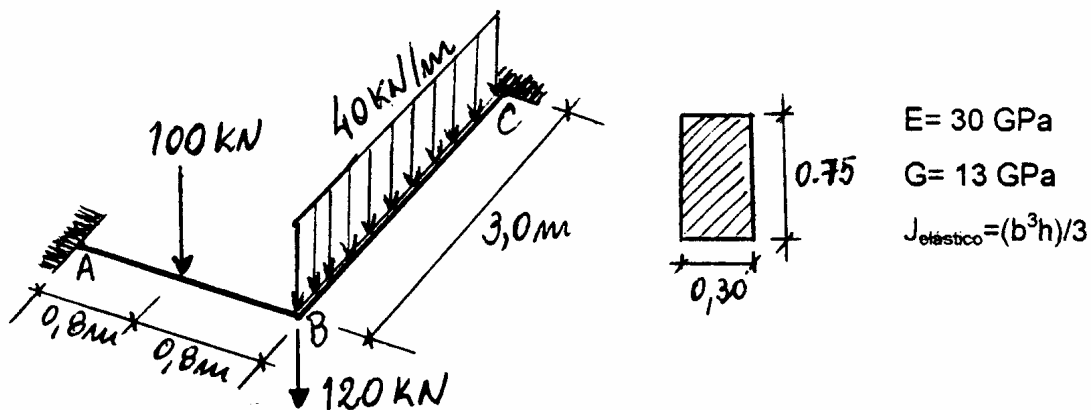
Vai resolver a estrutura pelo método dos deslocamentos supondo que as barras são axialmente indeformáveis.

- Identifique os deslocamentos nodais independentes e desenhe a estrutura fundamental (se achar conveniente pode simplificar a estrutura)
- Determine a matriz de rigidez
- Determine o vector $\{Q_0\}$
- Exemplifique como determinaria um dos elementos de $\{Q_0\}$ recorrendo ao PTV.
- Determine e esboce o diagrama de momentos finais.
- Foi entretanto colocada uma mola no ponto A que trabalha no sentido horizontal. Determine a rigidez que essa mole deverá ter de modo a que o momento na secção direita do topo da barra DB seja nulo.
 $EI = 50000 \text{ kNm}^2$



PROBLEMA 2.3.8

Considere a estrutura em betão armado, contida num plano horizontal e onde as secções A e C estão encastradas à flexão e torção.



- Identifique o número de deslocamentos nodais independentes e designe por d_1 o relativo ao deslocamento vertical de B.
- Construa a matriz de rigidez da estrutura e recorra ao Princípio dos Trabalhos Virtuais para quantificar K_{21}
- Defina o vector dos esforços independentes $\{X\}_f$. Calcule $\{Q\}$, $\{Q_0\}$ e $\{X_0\}$
- Qual o deslocamento vertical em B ?
- Esboce os diagramas de momentos flectores e momentos torçores finais.

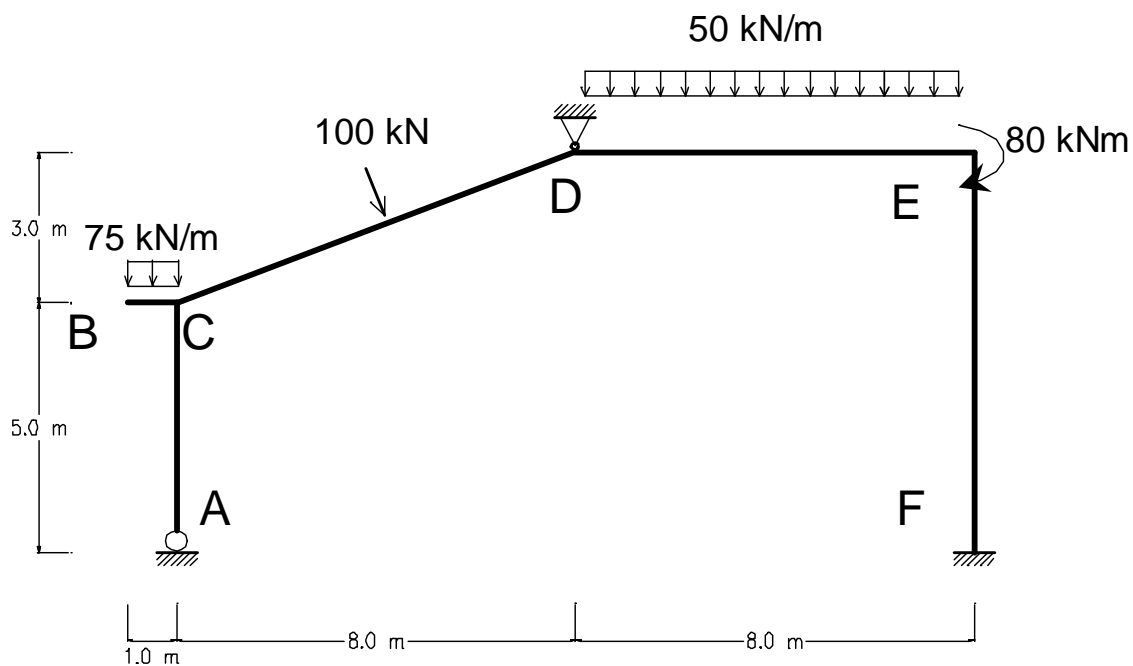
PROBLEMA 2.3.9

Vai resolver a estrutura pelo método de Cross atendendo às cargas aplicadas e ao assentamento vertical de 3mm no apoio F.

a) Determine e esboce o diagrama de momentos finais.

b) Qual a flecha final em B?

($EI = 1546600 \text{ kNm}^2$)



PROBLEMA 2.3.10

Vai resolver a estrutura pelo método de Cross.

a) Calcule e desenhe o diagrama de momentos devido ao carregamento no tabuleiro.

b) Qual a rotação do nó D?

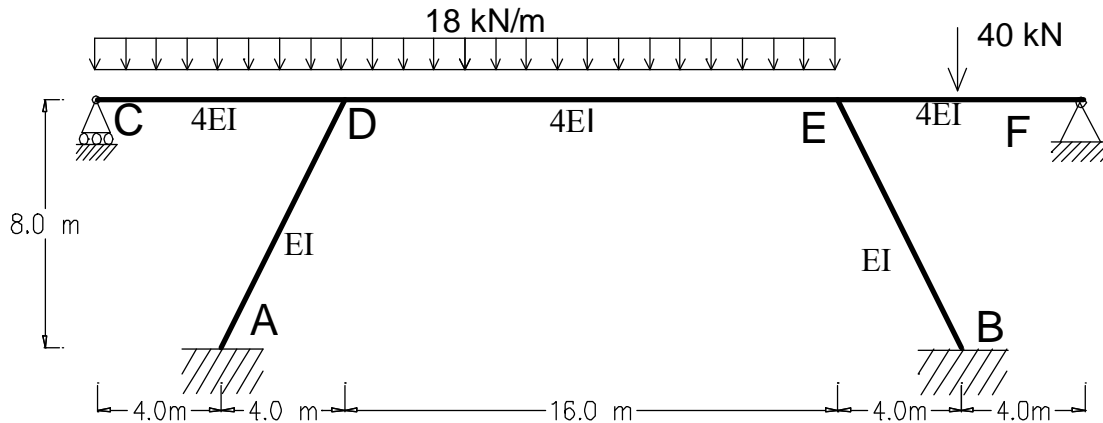
c) Suponha que existe um assentamento de apoio vertical de 5mm no apoio A em simultâneo com as acções definidas em a).

c.1) Determine os momentos finais (esboce o diagrama).

c.2) Qual a reacção vertical em A ?

d) Partindo do princípio que apenas há variação de temperatura uniforme no tabuleiro $\Delta T = +30\text{ }^\circ\text{C}$ quantifique os momentos de bloqueamento perfeito a ela associados.

($EI = 3.5 \times 10^6\text{ kNm}^2$, $\alpha = 10^{-5}\text{ }/^\circ\text{C}$)



PROBLEMA 2.3.11

O edifício de betão armado que se apresenta está estruturado em pórtico, é corrente, tem ductilidade normal e assenta num maciço rochoso em Évora. A cada um dos pisos correspondem os pesos das massas permanentes e quase permanentes mostradas assim como a matriz de flexibilidade associada a cada um dos deslocamentos horizontais.

Massas: 1º andar $M_1 = 3000\text{ kN}$

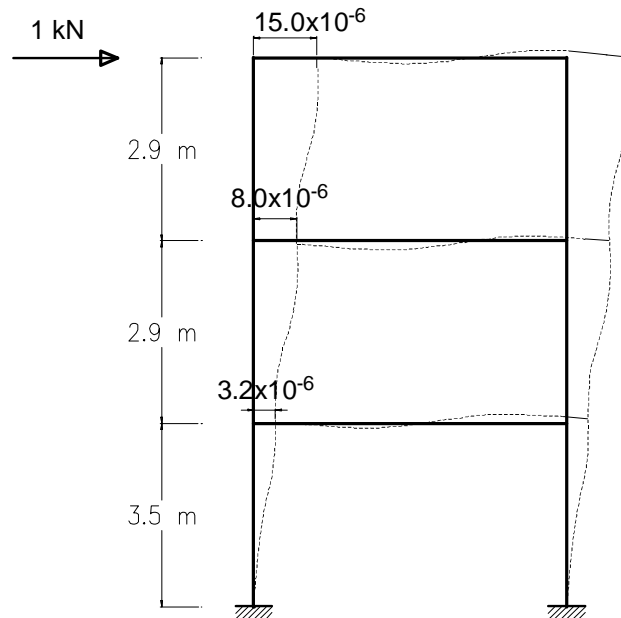
2º andar $M_2 = 3200\text{ kN}$

3º andar $M_3 = 2500\text{ kN}$

Matriz de Flexibilidade $[F] = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.8 & 3.2 \\ 2.8 & 5.0 & 8.0 \\ 3.2 & 8.0 & 15.0 \end{bmatrix} * 10^{-6}$

- a) Determine a frequência própria fundamental recorrendo ao método de Rayleigh
- b) Quantifique o valor característico das forças sísmicas
- c) Determine os deslocamentos horizontais devidos à acção sísmica

- d) Quais as vantagens e inconvenientes de uma estrutura com uma frequência própria fundamental próxima dos 0.5 Hz ?
- e) Indique dois métodos que lhe permitam distribuir as forças sísmicas globais actuantes numa estrutura pelos pórticos que a constituem. Indique as vantagens e desvantagens



de cada um deles.

SOLUÇÕES

Solução do problema 2.3.1

- a) d_1 = rotação de B, d_2 = translação de B
- b) $k_{11} = 10^6$, $k_{12} = 0$, $k_{22} = 0.233 \times 10^6$,
- c) $Q_{10} = 0$, $Q_{20} = -225$ kN

Solução do problema 2.3.2

- a) $\beta = 3$, d_1 = rotação de C, d_2 = rotação de E, d_3 = translação de C

$$b) [K] = \begin{bmatrix} 356000 & 40000 & -20000 \\ & 116000 & -40000 \\ \text{Sim.} & & 33333 \end{bmatrix} \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} -75 \text{ kNm} \\ 0 \\ 25 \text{ kN} \end{Bmatrix} \quad \{Q_0\} = \begin{Bmatrix} 9.375 \text{ kNm} \\ 208.3 \text{ kNm} \\ 0 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

$$c) \{X\}^T = \{M_2, M_3, M_6, M_7, M_8, M_9, M_{10}\} = \{-93.1, -85.0, -53.2, 15.54, -114.6, -114.6, 197.7\}$$

$$d) d^d = 20.4 \times 10^{-3} \text{m}$$

Solução do problema 2.3.3

$$a) Q_{10} = 25.986 \text{ kN}$$

$$b) k_{11} = 25268.8 \text{ kN/m}, k_{12} = 152.9 \text{ kN/rad}, k_{22} = 6426 \text{ kN/rad}$$

Solução do problema 2.3.4

$$a) k_{11} = 16530, k_{12} = 4350, k_{22} = 61825$$

$$b) \{Q\} = \begin{Bmatrix} -90 \text{ kNm} \\ 75 \text{ kN} \end{Bmatrix}, \quad \{Q_0\} = \begin{Bmatrix} 4.5 \text{ kNm} \\ 6.75 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

$$c) \{X\}^T = \{M_1, M_2, M_3\} = \{26.7, -42.1, 47.9\}$$

$$d) d_2 = 0.00153 \text{ m}$$

$$e) d^d = 0.00306 \text{ rad no sentido anti-horário}$$

$$f) \{Q\} = \begin{Bmatrix} 9.198 \text{ kNm} \\ 183.5 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

Solução do problema 2.3.5

a) Consiste em substituir as consolas por esforços transversos e momentos.

b) $\beta = 2$. d_1 = rotação no de topo da barra (2), d_2 = translação horizontal da viga inclinada

$$d) k_{11} = 49488, k_{12} = 2856, k_{22} = 4781$$

$$e) \{Q_0\} = \begin{Bmatrix} 1.569 \text{ kNm} \\ 7.168 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

Solução do problema 2.3.6

$$a) d_2 = 0.831 \text{ m !...}$$

$$b) A = 28.92 \text{ mm}^2$$

$$c) a) M_1 = -330 \text{ kNm}, M_2 = +175 \text{ kNm}$$

c)b) $M_1 = -113.6 \text{ kNm}$, $M_2 = -5.3 \text{ kNm}$

d) $N = 72.06 \text{ kN}$

Solução do problema 2.3.7

a) $d_1 = \text{rotação de B}$, $d_2 = \text{translação de B}$

b) $k_{11} = 156666.7 \text{ kNm/rad}$, $k_{12} = 33333.3 \text{ kNm/m}$, $k_{22} = 22222.2 \text{ kN/m}$

c) $\{Q_0\} = \begin{Bmatrix} -42.125 \text{ kNm} \\ 54.0 \text{ kN} \end{Bmatrix}$

e) $M_1 = -37.52 \text{ kNm}$, $M_2 = +37.48 \text{ kNm}$, $M_3 = -142.5 \text{ kNm}$

f) $k_m = 25763.6 \text{ kN/m}$

Solução do problema 2.3.8

a) $d_1 = \text{deslocamento vertical de B}$, $d_2 = \text{rotação de B em torno de BC}$, $d_3 = \text{rotação de B em torno de BA}$

b) $[K] = \begin{bmatrix} 1067596.4 & 741577.1 & -210937.5 \\ & 820265.6 & 0 \\ \text{Sim.} & & 476718.7 \end{bmatrix}$

c) $\{X\}^T = \{M_1, M_2, T_2, M_3, M_4, T_4\}$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 120 \text{ kN} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{Q_0\} = \begin{Bmatrix} -110 \text{ kNm} \\ -20 \text{ kNm} \\ 30 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

$$\{X_0\}^T = \{-20, -20, 0, -30, -30, 0\}$$

d) $d_1 = 0.0006538 \text{ m}$

e) $\{X\}^T = \{M_1, M_2, T_2, M_3, M_4, T_4\} = \{-278.8, 16.6, 12.4, 12.4, -120.2, -16.6\}$

Solução do problema 2.3.9

a) $r_{CA} = 0.562$, $r_{CD} = 0.438$, $r_{DC} = 0.484$, $r_{DE} = 0.516$, $r_{ED} = 0.5$, $r_{EF} = 0.5$

$M_{bpCD} = 106.75 \text{ kNm}$, $M_{bpDC} = -106.75 \text{ kNm}$, $M_{bpDE} = 310.74 \text{ kNm}$, $M_{bpED} = -222.66 \text{ kNm}$

$M_{NC} = 37.5 \text{ kNm}$, $M_{NE} = -80 \text{ kNm}$

$M_{CA} = -4.53 \text{ kNm}$, $M_{CD} = -42.06 \text{ kNm}$, $M_{DC} = -231.5 \text{ kNm}$, $M_{DE} = -231.5 \text{ kNm}$,
 $M_{ED} = -183.94 \text{ kNm}$, $M_{EF} = -103.94 \text{ kNm}$, $M_{FE} = 51.94 \text{ kNm}$
 b) $f_B = 11.563 \times 10^{-6} \text{ m}$ (\downarrow)

Solução do problema 2.3.10

a) $r_{DC} = r_{EF} = 0.508$, $r_{DE} = r_{ED} = 0.339$, $r_{DA} = r_{EB} = 0.153$
 $M_{bpDC} = -144 \text{ kNm}$, $M_{bpDE} = 384 \text{ kNm}$, $M_{bpED} = -384 \text{ kNm}$, $M_{bpEF} = 60 \text{ kNm}$
 $M_{DC} = -298.1 \text{ kNm}$, $M_{DE} = -344.5 \text{ kNm}$, $M_{DE} = -308.3 \text{ kNm}$, $M_{EF} = -250.7 \text{ kNm}$,
 $M_{DA} = -46.39 \text{ kNm}$, $M_{AD} = 23.2 \text{ kNm}$, $M_{EB} = -57.4 \text{ kNm}$, $M_{BE} = 28.7 \text{ kNm}$
 b) $\theta_D = -29.352 \times 10^{-6} \text{ rad}$ (no sentido horário)
 c.1) $M_{DC} = +1979.48.1 \text{ kNm}$, $M_{DE} = +1630.7 \text{ kNm}$, $M_{DE} = -1613.95 \text{ kNm}$, $M_{EF} = -1254.2$
 kNm ,
 $M_{DA} = -348.7 \text{ kNm}$, $M_{AD} = 174.35 \text{ kNm}$, $M_{EB} = -359.7 \text{ kNm}$, $M_{BE} = 179.8 \text{ kNm}$
 c.2) $R_A = -234.2 \text{ kN}$ (Tracção !...)
 d) $M_{bpAD} = M_{bpDA} = -2114.2 \text{ kNm}$, $M_{bpEB} = M_{bpBE} = -704.7 \text{ kNm}$, $M_{bpDC} = -590.625$
 kNm , $M_{bpDE} = M_{bpED} = +1575 \text{ kNm}$, $M_{bpEF} = -787.5 \text{ kNm}$,

Solução do problema 2.3.11

a) $f = 2.122 \text{ Hz}$
 b) $F_{k1} = 116.7 \text{ kN}$, $F_{k2} = 227.7 \text{ kN}$, $F_{k3} = 258.5 \text{ kN}$
 c) $d_1 = 4.391 \times 10^{-3} \text{ m}$, $d_2 = 8.833 \times 10^{-3} \text{ m}$, $d_3 = 15.181 \times 10^{-3} \text{ m}$