**Universidade do Algarve**

Faculdade de Ciências e Tecnologia

# Factorização de algumas Classes de Funções Matriciais e suas Aplicações

(Tese para a obtenção do grau de doutor no ramo de Matemática, especialidade de Análise Matemática)

**Ana Isabel da Costa Conceição Guerra**

Constituição do Júri:

Presidente: Reitor da Universidade do Algarve

Vogais:

Doutor Helmuth Robert Malonek, Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Doutor Viktor Grigorievich Kravchenko, Professor Catedrático da Universidade do Algarve (Orientador)

Doutor Stefan Grigorievich Samko, Professor Catedrático da Universidade do Algarve

Doutor Frank-Olme Ewald Speck, Professor Catedrático do Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa

Doutor Francisco Sepúlveda Teixeira, Professor Associado do Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa (Co-orientador)

Doutor Nenad Manojlovich, Professor Associado da Universidade do Algarve

Faro

2007

**Nome:** Ana Isabel da Costa Conceição Guerra

**Faculdade:** de Ciências e Tecnologia

**Orientador:** Viktor Grigorievich Kravchenko

**Co-orientador:** Francisco Sepúlveda Teixeira

**Data:** Dezembro de 2007

**Título da tese:** Factorização de algumas classes de funções matriciais e suas aplicações

**Resumo**

Este trabalho é dedicado à teoria da factorização de funções matriciais no espaço $L_2(\mathbb{T})$, onde $\mathbb{T}$ representa a circunferência unitária.

Consideram-se funções matriciais do tipo

$$A_\gamma(b) = \begin{pmatrix} e & b \\ b^* & b^*b + \gamma e \end{pmatrix},$$

onde $\gamma$ é uma constante complexa não nula, $e$ representa a função matricial identidade, $b$ pertence a $[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ e $b^*$ é a adjunta hermiteana de $b$.

O objectivo principal é a elaboração de um algoritmo para a construção de uma factorização das matrizes desta classe.

Constatamos e analisamos fortes ligações entre a factorização da função matricial $A_\gamma(b)$ e o operador $N_+(b) = P_+bP_-b^*P_+$, onde $P_\pm$ são os operadores de projecção de Cauchy.

Quando $n = 1$ e $b$ é o produto de uma função interna por uma função racional externa, construímos um algoritmo que permite resolver equações integrais da forma

$$(N_+(b) + \gamma I)\,\omega_+(t) = g_+(t),$$

e cujas soluções, por sua vez, nos vão permitir determinar uma factorização

da função matricial $A_\gamma(b)$.

Mostramos ainda que um raciocínio análogo ao que utilizamos para o estudo de matrizes do tipo $A_\gamma(b)$ pode ser adaptado para a obtenção de uma representação dos resolventes de uma classe especial de operadores integrais de Hankel.

**Palavras-chave:** Factorização de funções matriciais, algoritmo de factorização, problemas de contorno de Riemann, operadores de Hankel

**Title:** Factorization of some classes of matrix functions and its applications

**Abstract**

This work is dedicated to the theory of factorization of matrix functions in $L_2(\mathbb{T})$, where $\mathbb{T}$ denotes the unit circle.

We consider matrix functions of the type

$$A_\gamma(b) = \begin{pmatrix} e & b \\ b^* & b^*b + \gamma e \end{pmatrix},$$

where $\gamma$ is a non-zero complex constant, $e$ represents the identity matrix function, $b$ is a matrix function which belongs to $[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ and $b^*$ is the Hermitian adjoint of $b$.

The main objective is the elaboration of an algorithm to the construction of a factorization of matrix functions of that class.

Strong relations between a factorization of the matrix function $A_\gamma(b)$ and the operator $N_+(b) = P_+bP_-b^*P_+$, where $P_\pm$ are the Cauchy projection operators, are analyzed.

When $n = 1$ and $b$ is the product of an inner function with a rational outer function, we construct an algorithm that allows us to solve integral equations of the form

$$(N_+(b) + \gamma I)\,\omega_+(t) = g_+(t),$$

whose solutions permit us to determine a factorization of the matrix function $A_\gamma(b)$.

We also show that a similar reasoning to that used for the study of matrices of the type $A_\gamma(b)$ can be adapted to obtain a representation of the resolvent operators of a special class of Hankel integral operators.

**Keywords:** Factorization of matrix functions, factorization algorithm, Riemann contour problem, Hankel operators

**Agradecimentos**

Ao Professor Viktor G. Kravchenko agradeço o rigor, a exigência e a sabedoria com que sempre me apoiou. Agradeço ainda a sua amizade que em muito me ajudou em diversas situações.

Ao Professor Francisco Sepúlveda Teixeira agradeço o apoio, a amizade e a colaboração em diversos trabalhos.

Agradeço ao Professor Juan Carlos Rodriguez a sua amizade constante e a sua colaboração em alguns tópicos incluídos nesta tese.

Ao Professor Rui Marreiros agradeço a amizade, o companheirismo e o apoio, quer a nível pessoal quer a nível profissional.

À Professora Maria João Morgado agradeço a sua longa amizade e colaboração em exemplos importantes para a construção da secção 4.4.

Agradeço nas pessoas dos Professores António Ferreira dos Santos e José Cidade Mourão, o financiamento prestado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia a algumas actividades relacionadas com a tese, no contexto dos respectivos projectos científicos sob as suas responsabilidades.

Aos meus colegas e amigos dos Departamentos de Matemática, Química e Física, agradeço o apoio que me deram nos momentos mais difíceis.

À Professora Cristina Brito, agradeço a paixão com que me incutiu o gosto pela Matemática.

Agradeço aos meus pais e irmãs, o apoio, a compreensão e amor permanentes.

À Laura, à Catarina e ao Carlos agradeço todo o seu amor.

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Introdução

Este trabalho é dedicado à teoria da factorização de funções matriciais relativamente à circunferência unitária $\mathbb{T}$. Por factorização de uma matriz $G(t)$ compreende-se uma decomposição multiplicativa

$$G(t) = G_+(t)\Lambda(t)G_-(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

onde os factores $G_+(t)$ e $G_-(t)$ são não singulares e as matrizes $G_+^{\pm 1}(t)$ e $G_-^{\pm 1}(t)$ admitem prolongamento analítico na região interior de $\mathbb{T}$ e na região exterior de $\mathbb{T}$, respectivamente, e o factor $\Lambda(t)$ é uma função matricial diagonal da forma

$$\Lambda(t) = \mathrm{diag}\left[t^{\kappa_1}, \cdots, t^{\kappa_n}\right],$$

com $\kappa_1 \geq \cdots \geq \kappa_n$ inteiros denominados índices parciais da factorização. Dependendo da posição dos factores $G_\pm$ distingue-se entre factorização esquerda e direita.

A teoria da factorização de matrizes tem uma longa e interessante história que tem raízes no trabalho de J. Plemelj "Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. Monat. Math. Phys., 19, 211-245, 1908".

Esse artigo contém uma demonstração completa da existência de factorização para funções matriciais que são analíticas num contorno. Plemelj também considerou o caso de funções que são contínuas à Hölder num contorno, mas a sua demonstração é só parcial tendo sido completada posteriormente em 1943 por N. I. Muskhelishvili e N. P. Vekua.

O desenvolvimento da teoria da factorização foi estimulado por necessidades surgidas na teoria de operadores integrais singulares, na teoria de equações diferenciais lineares e não lineares, na teoria de difracção de ondas electromagnéticas e acústicas, entre outras.

Nos primeiros anos, a teoria desenvolveu-se essencialmente para as funções de Hölder mas, devido às suas diversas aplicações, houve a necessidade de modificar a noção de factorização, tendo surgido o conceito de factorização generalizada em $L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, por Simonenko.

Embora o conceito de factorização tenha tido grandes desenvolvimentos, não existe um método geral para a sua obtenção. Progressos têm sido conseguidos só para algumas classes de funções matriciais cujas características particulares determinam a abordagem a adoptar no estudo do problema de factorização (ver, por exemplo, [1], [3], [11] e [13]).

É possível ver que mesmo no caso das matrizes triangulares surgem problemas. A factorização de funções matriciais triangulares $2 \times 2$ com componentes diagonais factorizáveis pode ser reduzida ao problema de factorização de matrizes do tipo

$$G(t) = \begin{pmatrix} t^m & 0 \\ h(t) & t^{-m} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Esse método para factorizar tais funções matriciais foi desenvolvido por G. Chebotarev em 1956. No entanto, foi observado por Spitkovskii, em 1980, que existem funções matriciais triangulares factorizáveis com componentes diagonais não factorizáveis, sendo a factorização de tais matrizes (mesmo para o caso $2 \times 2$) um problema difícil. Embora em 1995, I. Feldman, I. Gohberg e N. Krupnik, tenham descrito um método para factorizar algumas classes de funções matriciais triangulares, em geral, o problema está em aberto.

A classe de matrizes para a qual foi mais desenvolvido o estudo da factorização é a classe de funções matriciais racionais. Em 1952 foi proposto por F. D. Gahov um algoritmo de factorização para esse tipo de matrizes. No caso de funções matriciais racionais não singulares na circunferência unitária, o problema de factorização pode-se resumir ao problema de factorização de funções matriciais polinomiais. Um método de aproximação algorítmica para a construção de uma factorização de uma função matricial racional factorizável encontra-se descrito em [34]. Mais recentemente (ver, por exemplo, [2]) foi proposta uma aproximação alternativa para a construção de uma factorização de uma função matricial racional, onde é dado ênfase a fórmulas explícitas. Em vez da aproximação algorítmica descrita por F. D. Gahov, foi apresentado um método baseado no facto de qualquer função matricial racional $n \times n$, $F$, admitir uma representação na forma

$$F(\lambda) = E + C(\lambda G - A)^{-1}B. \tag{1.1}$$

Aqui $E$ é a matriz identidade $n \times n$, $A$ e $G$ são matrizes quadradas de ordem $m$, e as matrizes $C$ e $B$ são do tipo $n \times m$ e $m \times n$, respectivamente. A representação (1.1) é chamada uma realização de $F$. Esta representação permite-nos reduzir o problema de factorização de $F$ para um problema de álgebra linear envolvendo 4 matrizes $A$, $B$, $C$ e $G$ e obter os factores numa forma explícita.

O objectivo principal do nosso trabalho é a elaboração de um algoritmo para a construção de uma factorização de funções matriciais do tipo

$$A_\gamma(b) = \begin{pmatrix} e & b \\ b^* & b^*b + \gamma e \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

onde $\gamma$ é uma constante complexa não nula, $e$ representa a função matricial identidade, $b$ é uma função matricial pertencente a $[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ e $b^*$ é a adjunta hermiteana de $b$.

Funções matriciais deste género surgiram pela primeira vez relacionadas com o problema de Riemann generalizado (ver, por exemplo, [28], Capítulo 4).

Também é interessante notar que a factorização generalizada de funções matriciais $2 \times 2$ do tipo (1.2) pode ser utilizada para a resolução da equação de Schrödinger não linear

$$i\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\eta|\psi|^2\psi, \quad \psi(x,t)|_{t=0} = \psi(x)$$

(ver [12], Capítulos 1 e 2).

Em geral, é possível mostrar (ver [28], pág. 158) que, no caso $2 \times 2$, o estudo da factorização de qualquer função matricial hermiteana com algumas relações entre os elementos diagonais pode ser reduzido ao estudo de $A_{-1}(b)$.

Por estes motivos, existem vários trabalhos dedicados a este assunto (para encontrar bibliografia adequada, ver [28] e [29]).

Mencionamos aqui somente os resultados que estão directamente ligados com os do nosso trabalho. Já há mais do que trinta anos (ver [23]) que foi descoberto que o problema de factorização das funções matriciais do tipo

(1.2) está relacionado com o estudo de operadores singulares que podem ser representados como um produto de operadores de Hankel (em [28] e em [29] é possível encontrar mais bibliografia sobre este tema). O artigo [22] relaciona uma factorização canónica da função matricial $2\times 2$, da forma $A_\gamma(b)$, quando $\gamma > 0$, com o operador resolvente do operador $N_-(b) = P_- b^* P_+ b P_-$. Em trabalhos de Litvinchuk e Spitkovskii foi mostrado (ver [28], pág. 158) que a função matricial $A_{-1}(b)$, de ordem $2 \times 2$, admite uma factorização generalizada em $L_2(\mathbb{T})$ se e só se a unidade não pertence ao espectro limite (isto é, ao conjunto dos pontos limite do espectro e dos valores próprios de multiplicidade infinita) do operador $N_-(b) = H(b)H^*(b)$ ($H(b) = P_- b^* P_+$ é um operador de Hankel com símbolo $b$) e os seus índices parciais são $\pm l$, onde $l$ é a multiplicidade de 1 como um valor próprio do operador $N_-(b)$. Notamos que, caso $\gamma < 0$, podemos sempre relacionar $A_\gamma(b_1)$ com $A_{-1}(b)$ através da igualdade

$$A_\gamma(b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-\gamma} \end{pmatrix} A_{-1}(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-\gamma} \end{pmatrix},$$

onde $b_1 = \sqrt{-\gamma}\, b$.

Estas fortes ligações entre a factorização da função matricial $A_\gamma(b)$ e $N_-(b)$ levaram-nos a dedicar um Capítulo da tese ao estudo dos operadores $N_-(b)$ e $N_+(b) = H^*(b)H(b)$ e de algumas equações que os envolvem.

Numa primeira etapa do nosso trabalho, o operador resolvente do operador $N_-(b)$ ($N_+(b)$), definido em $[L_2(\mathbb{T})]_{n,n}$, é obtido através de uma factorização generalizada canónica esquerda (direita) de funções matriciais do tipo (1.2). Numa segunda etapa, uma factorização generalizada canónica esquerda de (1.2) é construída (quando $-\gamma \in \rho(N_+(b)) = \rho(N_-(b))$) usando o operador resolvente de $N_+(b)$ (a mesma factorização é obtida utilizando o operador $N_-(b)$).

Em particular, é possível obter uma sua factorização generalizada canónica esquerda através das soluções das equações não homogéneas

$$(N_+(b) + \gamma I)\, u_+ = e \quad \text{e} \quad (N_+(b) + \gamma I)\, v_+ = P_+ b \tag{1.3}$$

(uma factorização generalizada canónica direita pode ser obtida através de equações da forma (1.3), onde substituímos $N_+(b)$ pelo operador $N_+(b^*)$ ou $N_-(b^*)$). Destes resultados segue que através das soluções das equações (1.3) é possível obter o operador inverso (quando existe) do operador $N_-(b) + \gamma I$. Caso seja pretendido o inverso de $N_+(b) + \gamma I$ basta considerarmos equações do tipo (1.3), substituindo $b$ por $b^*$.

É interessante notar que em trabalhos de L. A. Sakhnovich (ver [36]) foi desenvolvida uma teoria que permite obter os operadores inversos dos operadores com núcleo de diferença

$$Tf = \frac{d}{dx} \int_0^\omega s(x-t) f(t) dt,$$

onde $f \in L^2(0, \omega)$, $s \in L^2(-\omega, \omega)$ e a função

$$g(x) = \int_0^\omega s(x-t) f(t) dt$$

é absolutamente contínua, através das soluções das equações

$$Tf = 1 \quad \text{e} \quad Tf = s(x). \tag{1.4}$$

Nesta teoria a obtenção do operador inverso foi baseada na introdução e no estudo de alguns operadores construídos através das soluções das equações (1.4).

No nosso caso o caminho é diferente: soluções de (1.3) permitem obter uma factorização generalizada canónica da função matricial $A_\gamma(b)$ e depois a factorização, por sua vez, permite obter o operador inverso.

Numa fase seguinte, considerando funções matriciais $2 \times 2$, do tipo (1.2), admitindo uma factorização generalizada canónica e $b$ representada como o produto de uma função racional externa por uma função interna, construímos um algoritmo para resolver as equações (1.3) e assim obter uma factorização generalizada canónica esquerda de (1.2).

De seguida, estudámos as funções matriciais $2 \times 2$, da forma (1.2), admitindo uma factorização generalizada não canónica. Nesse caso, estamos perante uma função matricial hermiteana, os índices parciais são simétricos e podemos relacioná-los com a dimensão do núcleo dos operadores $N_+(b)+\gamma I$ e $N_-(b)+\gamma I$. Construímos então um algoritmo que nos permite determinar duas equações não homogéneas, similares a (1.3) e, com as soluções destas, encontrar uma factorização generalizada não canónica da função matricial. Caso $b$ admita uma representação através de um produto de uma função racional externa por uma função interna então, por um método similar ao descrito para o caso canónico, as funções de que necessitamos (soluções das equações não homogéneas) podem ser determinadas.

No último Capítulo da tese mostramos que um raciocínio análogo ao que utilizámos para o estudo de matrizes do tipo $A_\gamma(b)$ pode ser adaptado para obter uma representação explícita dos resolventes de uma classe especial de operadores integrais de Hankel que, por sua vez, pode ser aplicada ao estudo de equações que surgem nos problemas de difracção de uma onda electromagnética ou de uma onda acústica.

A tese encontra-se estruturada da seguinte forma.

No Capítulo 2, de carácter auxiliar, são introduzidos conceitos e resultados conhecidos que iremos precisar ao longo deste trabalho. Em particular, a secção 2.2 é essencial para a elaboração do Capítulo 3 e a secção 2.6 introduz o motivo e a importância da nossa escolha relativamente à classe de funções matriciais a factorizar, relacionando uma classe de funções matriciais hermiteanas $2 \times 2$, com determinante negativo, com a função matricial $A_{-1}(b)$, onde $b$ é uma função escalar.

Os Capítulos 3, 4 e 5 são constituídos por resultados originais.

O terceiro Capítulo é dedicado ao estudo dos operadores $N_{\pm}(b)$.

Na secção 3.1 começamos por definir os operadores autoadjuntos

$$N_{\pm}(b) : [L_2(\mathbb{T})]_{n,n} \to [L_2(\mathbb{T})]_{n,n}\,,$$

$$N_{+}(b) = P_{+} b P_{-} b^{*} P_{+} \quad \text{e} \quad N_{-}(b) = P_{-} b^{*} P_{+} b P_{-},$$

e por analisar algumas das suas propriedades quando $b \in [L_{\infty}(\mathbb{T})]_{n,n}$. Para $b$ com componentes na álgebra de Douglas, isto é, $b \in [C(\mathbb{T}) + L_{\infty}^{+}(\mathbb{T})]_{n,n}$, e $-\gamma$ pertencente ao conjunto resolvente do operador $N_{+}(b)$, descrevemos o operador resolvente $(N_{+}(b) + \gamma I)^{-1}$ através dos valores próprios e funções próprias de $N_{+}(b)$. Constatamos ainda que se a função matricial $b$ admite uma representação $b = b_{+} + b_{-}$, onde $b_{+}$, $b_{-}^{*} \in [H_{\infty}]_{n,n}$, então os operadores $N_{\pm}(b)$ não dependem da função matricial $b_{-}$.

Na secção 3.2 é considerado o caso quando $b \in H_{\infty,r}$ (isto é, $b$ pertence ao conjunto das funções de $H_{\infty}$ que se podem representar como o produto de uma função interna por uma função racional externa). É construído um algoritmo que nos permite resolver as equações do tipo

$$(N_{+}(b) + \gamma I)\, \omega_{+}(t) = g_{+}(t), \tag{1.5}$$

e cujas soluções nos vão possibilitar a determinação de uma factorização generalizada explícita de funções matriciais da forma (1.2) (no Capítulo 4).

Começamos com algumas constatações sobre a solubilidade de (1.5) quando $b \in L_\infty(\mathbb{T})$. Considerando $b \in H_{\infty,r}$ e utilizando propriedades das funções internas e externas, chegamos a um sistema linear de $p$ equações e $p$ incógnitas, cuja solução, ou soluções, nos dará a solução, ou soluções, da equação (1.5). Terminamos a secção com algumas observações sobre a equação e respectivo sistema em duas situações distintas, quando $-\gamma$ pertence ao conjunto resolvente de $N_+(b)$ e quando $-\gamma$ é um valor próprio de multiplicidade finita.

Na secção 3.3 apresentamos um exemplo de aplicação do algoritmo descrito na secção anterior.

Os resultados presentes no Capítulo 3, na sua maioria, foram apresentados na Conferência "Operator Theory, Function Spaces and Applications", na Universidade de Aveiro, em Julho de 2005, e no Workshop sobre Operadores Integrais da Escola de Verão de Matemática, promovida pela Sociedade Portuguesa de Matemática, em Setembro de 2005, na Universidade do Algarve, e encontram-se publicados no artigo [7].

O Capítulo 4 é dedicado à factorização de funções matriciais $A_\gamma(b)$.

Na secção 4.1 são indicadas algumas propriedades da função matricial.

Na secção seguinte, os operadores resolventes de $N_\pm(b)$ são obtidos através de uma factorização generalizada canónica de funções matriciais do tipo (1.2).

Na secção 4.3 estudamos a função matricial (1.2) quando esta admite uma factorização generalizada canónica esquerda, $A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-$ (podendo um raciocínio análogo ser feito considerando uma factorização generalizada canónica direita). Analisando o caso quando $b \in [L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ (subsecção

4.3.1), começamos por introduzir um problema de contorno de Riemann e relacioná-lo com uma factorização generalizada canónica esquerda da função matricial (1.2). De seguida, mostramos que (1.2) admite uma factorização generalizada canónica esquerda se e só se $-\gamma \in \rho(N_+(b))$. Obtemos a solução do problema de contorno de Riemann e, consequentemente, uma factorização generalizada canónica esquerda de (1.2), através do operador resolvente de $N_+(b)$. Em particular, temos que é possível obter uma factorização generalizada canónica esquerda através das soluções das equações não homogéneas (1.3). Terminamos esta subsecção com uma generalização dos resultados da secção 2.6, para o caso quando o determinante da função matricial hermiteana considerada é positivo. Analisando o caso quando $b$ possui todas as componentes na álgebra de Douglas (subsecção 4.3.2), o operador $N_+(b)$, além de autoadjunto é compacto e como o seu operador resolvente pode ser representado através dos valores próprios $\{\lambda_k\}$ e respectivas funções próprias de $N_+(b)$, $\{\nu_k^+\}$, obtem-se uma factorização generalizada canónica esquerda de (1.2) através dos $\lambda_k$ e $\nu_k^+$. Na subsecção 4.3.3, onde é analisado o caso quando $b$ pertence a uma álgebra decomponível de funções contínuas $[\mathcal{A}(\mathbb{T})]_{n,n}$, constata-se que se considerarmos $b = b_- + b_+$, onde $b_\pm \in [\mathcal{A}^\pm(\mathbb{T})]_{n,n}$, a construção de uma factorização generalizada esquerda (direita) (mesmo não canónica) não depende do factor $b_-$ $(b_+)$. De uma forma mais geral, se a função matricial $b \in [L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ admitir uma representação $b = b_- + b_+$, onde $b_+,\ b_-^* \in [H_\infty]_{n,n}$, o raciocínio feito para $[\mathcal{A}(\mathbb{T})]_{n,n}$ permanece válido (desde que (1.2) admita uma factorização generalizada). Este facto leva à conclusão de que existe uma classe bastante geral de funções matriciais para a qual o problema de existência de uma factorização generalizada canónica esquerda (direita) depende somente da função matricial $b_+$ ($b_-$).

Na secção 4.4, dedicada ao estudo do problema de factorização de funções matriciais $2 \times 2$, da forma (1.2), admitindo uma factorização generalizada não canónica $A_\gamma(b) = A_\gamma^+ \Lambda A_\gamma^-$ (isto é, quando $-\gamma \in \sigma(N_+(b))$), começamos por mostrar que o problema de contorno de Riemann analisado na secção anterior não é solúvel. Desse modo, temos que determinar novos problemas de contorno de Riemann a estudar (dependendo do comportamento do factor $A_\gamma^-$ no infinito). Estamos perante uma função matricial hermiteana, os índices parciais são simétricos e podemos relacioná-los com a dimensão do núcleo dos operadores $N_+(b) + \gamma I$ e $N_-(b) + \gamma I$. Construímos então um algoritmo que nos permite determinar duas equações não homogéneas do tipo (1.5) e, com as soluções destas, encontrar uma factorização generalizada não canónica de (1.2).

Na secção 4.5, onde retratamos o caso $b \in H_{\infty,r}$, o algoritmo descrito no Capítulo 3 permite-nos construir um algoritmo centrado na obtenção de uma factorização generalizada explícita de funções matriciais da forma (1.2).

Terminamos com a secção 4.6, onde são apresentados alguns exemplos com o objectivo de ilustrar e clarificar os resultados descritos nas secções anteriores.

Os resultados presentes nas secções 4.1, 4.2 e 4.3 (com excepção do Teorema 4.2) foram apresentados na Conferência "Internacional Workshop on Operator Theory and Applications", na Universidade do Algarve, em Setembro de 2000, e encontram-se publicados no artigo [9]. O Teorema 4.2 foi apresentado na Conferência "Operator Theory, Function Spaces and Applications", na Universidade de Aveiro, em Julho de 2005, e encontra-se publicado no artigo [7]. Os resultados das secções 4.4 e 4.5 foram apresentados na Conferência "Operator Algebras, Operator Theory and Applications", no Instituto Superior Técnico, em Setembro de 2006, e foram aceites para publicação na forma do artigo [6].

No último Capítulo, obtivemos uma representação explícita dos resolventes de uma classe especial de operadores integrais de Hankel,

$$\mathcal{K}\varphi(t) = \int_0^{+\infty} k(t+\tau)\varphi(\tau)d\tau,\ t > 0. \tag{1.6}$$

Essa representação é obtida através de uma factorização generalizada canónica de uma classe de funções matriciais similar a (1.2), com a ajuda de operadores com propriedades espectrais idênticas às dos operadores considerados para o estudo de (1.2), utilizando um raciocínio semelhante ao utilizado na obtenção de uma factorização generalizada canónica de funções matriciais do tipo (1.2).

Os resultados presentes no Capítulo 5 foram apresentados na Conferência "Factorization, Singular Operators and Related Problems", na Universidade da Madeira, em Janeiro de 2002, e encontram-se publicados no artigo [8].

# Capítulo 2

# Conceitos e resultados auxiliares

Seja $\mathbb{T}$ a circunferência unitária, i.e., $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$. Denotemos por $\mathbb{T}_+$ o disco unitário, i.e., $\mathbb{T}_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e por $\mathbb{T}_-$ a região exterior da circunferência unitária, $\mathbb{T}_- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Iremos trabalhar com o espaço $L_2(\mathbb{T})$ das (classes de equivalência de) funções complexas $\varphi$ mensuráveis à Lebesgue em $\mathbb{T}$ tais que $|\varphi|^2$ é somável em $\mathbb{T}$, com a norma

$$\|\varphi\|_2 = \left( \int_{\mathbb{T}} |\varphi(t)|^2 |dt| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usaremos $L_\infty(\mathbb{T})$ para designar o espaço das (classes de equivalência de) funções complexas essencialmente limitadas em $\mathbb{T}$ com a norma uniforme.

Designaremos por $C(\mathbb{T})$ a álgebra das funções contínuas em $\mathbb{T}$ com a norma uniforme e por $C^{\pm}(\mathbb{T})$ a subálgebra de $C(\mathbb{T})$ que consiste em todas as funções que são restrições a $\mathbb{T}$ de funções holomórficas em $\mathbb{T}_{\pm}$ e contínuas em $\mathbb{T}_{\pm} \cup \mathbb{T}$. Usaremos ainda $C^{-,0}(\mathbb{T})$ para representar o subespaço de $C^{-}(\mathbb{T})$

das funções que se anulam no infinito. Sabe-se que (ver, por exemplo, [15], Capítulo 2)

$$C^+(\mathbb{T}) \oplus C^{-,0}(\mathbb{T}) \subsetneqq C(\mathbb{T}). \tag{2.1}$$

Seja $a \in C(\mathbb{T})$. Vamos assumir que a função não se anula em $\mathbb{T}$. Por $[\arg a(z)]_{\mathbb{T}}$ denotamos a variação total da função arg $a(z)$ quando a variável $z$ varia em $\mathbb{T}$ no sentido positivo. Ao número $\frac{1}{2\pi}[\arg\ a(z)]_{\mathbb{T}}$ daremos a designação de índice da função $a$ e será denotado por ind$a$.

Por $R(\mathbb{T})$ denotaremos a álgebra das funções racionais sem pólos em $\mathbb{T}$. $R^+(\mathbb{T})$ representará o subespaço de $R(\mathbb{T})$ das funções racionais sem pólos em $\mathbb{T}_+$ e $R^-(\mathbb{T})$ o subespaço de $R(\mathbb{T})$ das funções racionais com pólos em $\mathbb{T}_+$. Definindo $R^{-,0}(\mathbb{T})$ como o subespaço de $R^-(\mathbb{T})$ das funções racionais que se anulam no infinito, temos a seguinte representação em soma directa

$$R(\mathbb{T}) = R^+(\mathbb{T}) \oplus R^{-,0}(\mathbb{T}).$$

$[A]_{n,n}$ designa a classe de funções matriciais $n \times n$ cujas componentes pertencem ao espaço $A$.

$G[A]_{n,n}$ representará o grupo dos elementos invertíveis em $[A]_{n,n}$.

Vamos precisar de algumas relações entre os espaços referidos.

**Proposição 2.1** *i)* $L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_2(\mathbb{T})$,

*ii)* $C(\mathbb{T})$ *é denso em* $L_2(\mathbb{T})$,

*iii)* $R(\mathbb{T})$ *é denso em* $L_2(\mathbb{T})$.

## 2.1 O operador integral singular de Cauchy

Denotemos por $S_{\mathbb{T}}$ o operador integral singular de Cauchy definido em $L_2(\mathbb{T})$,

$$S_{\mathbb{T}}\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \ t \in \mathbb{T},$$

onde o integral é entendido no sentido do valor principal de Cauchy.

Vamos precisar de algumas propriedades (ver, por exemplo, [15], Capítulo 1 e [20], Capítulo 1) do operador $S_{\mathbb{T}}$.

**Teorema 2.1** *O operador $S_{\mathbb{T}}$ é limitado em $L_2(\mathbb{T})$. Além disso,*

$$S_{\mathbb{T}}^2 = I.$$

**Teorema 2.2** *O operador $S_{\mathbb{T}}$ é autoadjunto em $L_2(\mathbb{T})$.*

O Teorema 2.1 permite introduzir em $L_2(\mathbb{T})$ um par de operadores de projecção complementares

$$P_+ = \frac{1}{2}(I + S_{\mathbb{T}}) \quad \text{e} \quad P_- = \frac{1}{2}(I - S_{\mathbb{T}}).$$

Obviamente temos que

$$P_+ - P_- = S_{\mathbb{T}} \quad \text{e} \quad P_+P_- = P_-P_+ = 0.$$

Como habitualmente, usaremos a seguinte notação

$$L_2^+(\mathbb{T}) = \text{im}P_+, \ L_2^{-,0}(\mathbb{T}) = \text{im}P_-, \ L_2^-(\mathbb{T}) = L_2^{-,0}(\mathbb{T}) \oplus \mathbb{C}.$$

Os projectores $P_\pm$ permitem decompor o espaço $L_2(\mathbb{T})$ na soma directa topológica

$$L_2(\mathbb{T}) = L_2^+(\mathbb{T}) \oplus L_2^{-,0}(\mathbb{T}).$$

Designe-se por $L_\infty^\pm(\mathbb{T})$ o subespaço de $L_\infty(\mathbb{T})$ que consiste em todas as funções que são em q.t.p. o limite de funções holomórficas e limitadas em $\mathbb{T}_\pm$. Vem que

$$L_\infty^\pm(\mathbb{T}) \subset L_2^\pm(\mathbb{T}).$$

Temos os seguintes resultados (ver, por exemplo, [15], Capítulo 2).

**Teorema 2.3** *Seja $a_+ \in L_\infty^+(\mathbb{T})$ (respectivamente, $a_- \in L_\infty^-(\mathbb{T})$). Então*

$$P_+a_+P_+ = a_+P_+ \quad (P_-a_-P_- = a_-P_-).$$

**Corolário 2.1** *Sejam $a, b \in L_\infty(\mathbb{T})$, $c_+ \in L_\infty^+(\mathbb{T})$ e $c_- \in L_\infty^-(\mathbb{T})$. Então*

*i)* $(aP_+ + bP_-)(c_+P_+ + c_-P_-) = ac_+P_+ + bc_-P_-$,

*ii)* $(P_+c_-I + P_-c_+I)(P_+aI + P_-bI) = P_+ac_-I + P_-bc_+I$.

**Corolário 2.2** *Se $c_+^{\pm 1} \in L_\infty^+(\mathbb{T})$ e $c_-^{\pm 1} \in L_\infty^-(\mathbb{T})$, então $c_+P_+ + c_-P_-$ é invertível, com inverso dado por*

$$(c_+P_+ + c_-P_-)^{-1} = c_+^{-1}P_+ + c_-^{-1}P_-.$$

Vamos a seguir enunciar um resultado relativo à compacticidade dos operadores $P_-aP_+$ e $P_+aP_-$ quando $a$ pertence à álgebra de Douglas, isto é, $a \in C(\mathbb{T}) + L_\infty^+(\mathbb{T})$ e que admite generalização no caso matricial.

**Lema 2.1** *Os operadores $P_-aP_+$ e $P_+aP_-$ são compactos em $L_2(\mathbb{T})$ se e só se $a \in C(\mathbb{T}) + L_\infty^+(\mathbb{T})$.*

## 2.2 Factorização interna-externa

Denotamos por $H_2$ o espaço de Hardy, i.e., a classe de todas as funções $f$ analíticas em $\mathbb{T}_+$ tais que

$$f(\xi) = \sum_{n\geq 0} \widehat{f}(n)\xi^n, \ \xi \in \mathbb{T}_+,$$
$$\|f\|_{H_2} =^{def} \sum_{n\geq 0} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty,$$

onde $\widehat{f}(n), \ n \geq 0$ denota os coeficientes de Taylor de $f$.

Denotemos por $f|_A$ a restrição de $f$ ao conjunto $A$.

Consideremos a correspondência

$$j: \ z^n|_{\mathbb{T}_+} \mapsto z^n|_{\mathbb{T}}, \ n \geq 0,$$

que estende um operador de $H_2$ a $L_2(\mathbb{T})$.

Sejam $\widehat{F}(n), \ n \in \mathbb{Z}$, os coeficientes de Fourier de $F$, $F \in L_2(\mathbb{T})$, i.e.,

$$\widehat{F}(n) =^{def} \langle F, z^n \rangle, \quad \text{onde} \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{T}} \varphi\, \overline{\psi}\, dm.$$

A imagem $jH_2$ consiste precisamente nas (classes de) funções $F$, $F \in L_2(\mathbb{T})$, para as quais $\widehat{F}(n) = 0, \ n < 0$. Além disso, se $F = jf$ então $\widehat{f}(n) = \widehat{F}(n)$, $n \geq 0$.

Iremos identificar $f$ e $jf$ para que $H_2$ consista nos elementos de $L_2(\mathbb{T})$ que podem ser prolongados analiticamente em $\mathbb{T}_+$, i.e., o fecho linear do conjunto gerado por $z^n$, $n \geq 0$,

$$H_2 = \text{clos span}\{z^n, \ n \geq 0\} = \left\{F \in L_2(\mathbb{T}) : \widehat{F}(n) = 0, \ n < 0\right\}.$$

De igual forma podemos associar a classe de todas as funções analíticas e limitadas em $\mathbb{T}_+$, $H_\infty$, a $L_\infty(\mathbb{T}) \cap L_2^+(\mathbb{T})$.

Vamos definir agora dois operadores de deslocamento.

1. O deslocamento bilateral
$$\mathcal{D}f = zf,$$
onde $f$ é uma função em $\mathbb{T}$, $z = z|_{\mathbb{T}}$;

2. O deslocamento unilateral
$$Df = zf,$$
onde $f$ é uma função em $\mathbb{T}_+$, $z = z|_{\mathbb{T}_+}$.

O termo deslocamento pode ser associado à acção de $\mathcal{D}$ $(D)$ nos coeficientes de Fourier (Taylor). De facto,

$$(\widehat{\mathcal{D}f})(n) = \widehat{F}(n-1),\ n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad (\widehat{Df})(n) = \widehat{f}(n-1),\ n \geq 1.$$

Como $\mathcal{D}z^n = z^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, vem que

$$\mathcal{D}H_2 \subset H_2 \quad \text{e} \quad D = \mathcal{D}|_{H_2}.$$

**Teorema 2.4** *Seja $E \subset L_2(\mathbb{T})$, $\mathcal{D}E \subsetneqq E$. Então existe uma função mensurável $\theta$, única a menos de uma constante multiplicativa de módulo* 1, *tal que $|\theta| = 1$ em q.t.p. em $\mathbb{T}$ e $E = \theta H_2$.*

**Corolário 2.3** *Se $E \neq \{0\}$, $E \subset H_2$ e $DE \subset E$, então existe $\theta \in H_2$, $|\theta| = 1$ em q.t.p. em $\mathbb{T}$, tal que $E = \theta H_2$.*

Denotemos por $E_f$ o fecho linear do conjunto gerado por $\mathcal{D}^n f$, $n \geq 0$, i.e.,

$$E_f =^{def} \text{clos span}\left\{z^n f :\ n \geq 0\right\}.$$

Introduzimos agora os conceitos de função interna e função externa que desempenham um papel importante na análise espectral e teoria de funções. Iremos usá-los na resolução de equações integrais e na factorização explícita de funções matriciais.

**Definição 2.1** *Uma função $\theta \in H_2$ verificando $|\theta| = 1$ em q.t.p. em $\mathbb{T}$ é chamada interna.*

Como exemplo de funções internas temos os produtos de Blaschke, i.e., funções da forma

$$B(z) = z^l \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k} \frac{\lambda_k - z}{1 - \overline{\lambda_k} z},$$

onde $l$ é um número inteiro não negativo e $\{\lambda_k\}$ é uma sucessão de pontos de $\mathbb{T}_+$ com $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\lambda_k|) < \infty$. Um produto de Blaschke anula-se nos pontos $\lambda_k$ e, caso $l > 0$, em $z = 0$, e somente nesses pontos.

Um exemplo de uma função interna sem zeros em $\mathbb{T}_+$ é

$$V(z) = \lambda \exp\left\{ - \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi) \right\}.$$

Tal função é dita singular.

**Teorema 2.5** *Qualquer função interna $\theta$ pode ser representada na forma*

$$\theta = BV,$$

*onde $B$ é um produto de Blaschke e $V$ uma função interna sem zeros em $\mathbb{T}_+$.*

**Lema 2.2** *Seja $\theta$ uma função interna. Então $\dim (\theta H_2)^{\perp} < \infty$ se e só se $\theta$ é um produto de Blaschke finito.*

**Definição 2.2** *Uma função $f \in H_2$ é chamada externa se $E_f = H_2$.*

Uma função externa, em geral, tem a forma

$$\exp\left\{ \int \frac{\xi + z}{\xi - z} \log|f(\xi)| dm(\xi) \right\}.$$

Em particular, toda a função racional sem pólos nem zeros em $\mathbb{T}_+ \cup \mathbb{T}$ é uma função externa.

**Proposição 2.2** *Seja $f \in H_2$. As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *$f$ é uma função externa*

2. *$g \in H_2$, $\dfrac{g}{f} \in L_2(\mathbb{T}) \Rightarrow \dfrac{g}{f} \in H_2$.*

Notemos que se $f$ e $g$ são duas funções externas tais que $|f| = |g|$ em q.t.p. em $\mathbb{T}$, então $f = \lambda\, g,\ \lambda \in \mathbb{T}$.

Já estamos em condições de enunciar o resultado principal desta secção:

**Teorema 2.6** *Se $f \in H_2$, $f \neq 0$, então existe uma função interna $\theta$ e uma função externa $f_e$ tal que*

$$f = \theta f_e.$$

*Além disso, tal factorização é única a menos de um factor constante multiplicativo e $E_f = \theta H_2$.*

Denotemos por $H_{\infty,r}$ o conjunto das funções de $H_\infty$ que se podem representar como o produto de uma função interna por uma função racional externa.

Seja $\theta$ uma função interna. Consideremos a seguinte decomposição do espaço de Hardy

$$H_2 = \theta H_2 \oplus (H_2 \ominus \theta H_2)\,. \tag{2.2}$$

Temos o seguinte resultado sobre o subespaço $H_2 \ominus \theta H_2$ (ver [33], pág. 30).

**Lema 2.3**

$$H_2 \ominus \theta H_2 = H_2 \cap \overline{z}\theta\overline{H_2},$$

*onde a barra significa conjugação complexa.*

Seja $P_\theta$ a projecção ortogonal sobre o subespaço $(\theta H_2)^\perp = H_2 \ominus \theta H_2$,

$$P_\theta: \ L_2(\mathbb{T}) \to H_2 \ominus \theta H_2,$$

$$P_\theta =^{def} P_{(\theta H_2)^\perp}.$$

**Lema 2.4** *Seja $\theta$ uma função interna. Então*

$$P_\theta = P_+ - \theta P_+ \overline{\theta} I.$$

Introduzimos ainda a seguinte projecção

$$Q_\theta = \theta P_+ \overline{\theta} I: \ L_2(\mathbb{T}) \to \theta H_2.$$

As projecções $P_\theta$ e $Q_\theta$ têm as seguintes propriedades:

1.
$$P_+ = P_\theta + Q_\theta; \tag{2.3}$$

2.
$$P_\theta f = 0, \ \forall f \in \theta H_2; \tag{2.4}$$

3.
$$P_\theta f = f, \ \forall f \in H_2 \ominus \theta H_2; \tag{2.5}$$

4.
$$Q_\theta f = f, \ \forall f \in \theta H_2; \tag{2.6}$$

5.
$$Q_\theta f = 0, \ \forall f \in H_2 \ominus \theta H_2; \tag{2.7}$$

$\forall x \in H_2$ temos

6.
$$\langle P_\theta\, x, y\rangle = 0,\ \forall y \in \theta H_2;$$

7.
$$\langle P_\theta\, x, y\rangle = \langle x, y\rangle,\ \forall y \in H_2 \ominus \theta H_2;$$

8.
$$\langle Q_\theta\, x, y\rangle = \langle x, y\rangle,\ \forall y \in \theta H_2;$$

9.
$$\langle Q_\theta\, x, y\rangle = 0,\ \forall y \in H_2 \ominus \theta H_2.$$

## 2.3 Factorização de funções escalares

Vamos, nesta secção, introduzir o conceito de factorização de funções escalares definidas em vários espaços e relacioná-lo com operadores integrais singulares, definidos em $L_2(\mathbb{T})$.

Comecemos com a noção de factorização de funções racionais. Seja $r = \dfrac{q_1}{q_2}$ uma função racional sem pólos nem zeros em $\mathbb{T}$ (ou seja, $r \in R(\mathbb{T})$ que não se anula em $\mathbb{T}$). Escrevamos

$$q_1(t) = \alpha \prod_{j=1}^{m_+}(t - z_j^+) \prod_{j=1}^{m_-}(t - z_j^-),$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ e $z_j\pm$, $j = 1, \cdots, m_\pm$, são os zeros de $r$ em $\mathbb{T}_\pm$, cada um deles figurando na representação anterior um número de vezes igual à sua multiplicidade algébrica, e

$$q_2(t) = \beta \prod_{j=1}^{n_+}(t - p_j^+) \prod_{j=1}^{n_-}(t - p_j^-),$$

onde $\beta \in \mathbb{C}$ e $p_j^{\pm}$, $j = 1, \cdots, n_{\pm}$, são os pólos de $r$ em $\mathbb{T}_{\pm}$ (também contando com as respectivas multiplicidades). Obtemos então a seguinte decomposição da função racional $r$:

$$r(t) = r_{-}(t)t^{\kappa}r_{+}(t),$$

em que

$$r_{-}(t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_+}\left(1 - t^{-1}z_j^{+}\right)}{\prod_{j=1}^{n_+}\left(1 - t^{-1}p_j^{+}\right)}, \;\; r_{+}(t) = \gamma\frac{\prod_{j=1}^{m_-}\left(t - z_j^{-}\right)}{\prod_{j=1}^{n_-}\left(t - p_j^{-}\right)}, \;\; \kappa = m_{+} - n_{+} \text{ e } \gamma \in \mathbb{C}.$$

Salientemos algumas das propriedades da representação obtida:

i) $r_{-}, r_{-}^{-1} \in R(\mathbb{T})$ são funções analíticas em $\mathbb{T}_{-}$

ii) $r_{+}, r_{+}^{-1} \in R(\mathbb{T})$ são funções analíticas em $\mathbb{T}_{+}$

iii) $\kappa$, univocamente determinado pela função $r$, coincide com o ind $r$.

**Definição 2.3** *Seja $r$ uma função racional sem pólos e sem zeros em $\mathbb{T}$. Chama-se factorização de $r$, em relação a $\mathbb{T}$, a uma representação de $r$ na forma*

$$r(t) = r_{-}(t)t^{\kappa}r_{+}(t), \tag{2.8}$$

*em que os factores satisfazem as condições* i) *a* iii) *acima indicadas.*

Vamos agora estender o conceito de factorização de funções racionais invertíveis a classes de funções mais gerais.

**Definição 2.4** *Chama-se factorização de $a \in C(\mathbb{T})$, em relação a $\mathbb{T}$, a qualquer representação de $a$ na forma*

$$a(t) = a_{-}(t)t^{\kappa}a_{+}(t),$$

*onde $a_{+}^{\pm 1} \in C^{+}(\mathbb{T})$, $a_{-}^{\pm 1} \in C^{-}(\mathbb{T})$ e $\kappa$ é um número inteiro.*

Visto que ind$a_-$ = ind$a_+$ = 0, o número $\kappa$ é unicamente definido pela função $a$ e temos $\kappa = \text{ind}a$.

A factorização diz-se canónica se $\kappa = 0$.

Notemos que se $a \in C(\mathbb{T})$ é uma função que admite uma factorização em relação a $\mathbb{T}$, então podemos obter fórmulas explícitas para os factores da factorização, $a_+$ e $a_-$. De facto, $a(t)t^{-\kappa}$ tem índice zero, assim $\log(t^{-\kappa}a(t)) \in C(\mathbb{T})$. E, uma vez que $\log a_\pm \in C^\pm(\mathbb{T})$, temos

$$P_+\log(t^{-\kappa}a(t)) = \log a_+(t) \quad \text{e} \quad P_-\log(t^{-\kappa}a(t)) = \log a_-(t). \tag{2.9}$$

É assumido que $a_-(\infty) = 1$. Obtemos as fórmulas

$$a_+(t) = \exp\left\{P_+\log(t^{-\kappa}a(t))\right\} \quad \text{e} \quad a_-(t) = \exp\left\{P_-\log(t^{-\kappa}a(t))\right\}.$$

No entanto, visto que o operador integral singular não é limitado em $C(\mathbb{T})$ (ver, por exemplo, [25]) (e, portanto, também $P_+$ e $P_-$ não são limitados em $C(\mathbb{T})$), não se pode garantir que $P_+f$ e $P_-f$ pertençam a $C(\mathbb{T})$ para qualquer $f \in C(\mathbb{T})$. Daqui resulta que os primeiros membros das igualdades (2.9) podem não pertencer a $C(\mathbb{T})$, e, caso tal aconteça, a função $f$ não admite factorização em relação a $\mathbb{T}$, no sentido da Definição 2.4.

Tal limitação sugere a necessidade de, ou restringir o conjunto das funções contínuas por forma a garantir a existência de factorização para os elementos dessa classe ou estender o conceito de factorização por forma a permitir que os factores pertençam a um espaço de funções que não o das contínuas.

Consideremos, em primeiro lugar, uma restrição de $C(\mathbb{T})$ por forma a garantir a existência de factorização.

Assim, seja $\mathcal{C}$ uma álgebra de Banach de funções contínuas em $\mathbb{T}$, $\mathcal{C} \subset C(\mathbb{T})$, possuindo as seguintes propriedades:

i) $R(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}$

ii) $\mathcal{C}$ tem a propriedade da invertibilidade, ou seja, é fechada para o inverso,

$$a \in \mathcal{C} \ \wedge \ a(t) \neq 0, \ t \in \mathbb{T} \ \Rightarrow \ a \in G\mathcal{C} \ \wedge \ a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Designaremos por $\mathcal{C}^+$, $\mathcal{C}^-$ e $\mathcal{C}^{-,0}$ as subálgebras de $\mathcal{C}$ definidas por

$$\mathcal{C}^{\pm} = \mathcal{C} \cap C^{\pm}(\mathbb{T}), \quad \mathcal{C}^{-,0} = \mathcal{C} \cap C^{-,0}(\mathbb{T}). \tag{2.10}$$

**Proposição 2.3** *Seja $\mathcal{C}$ uma álgebra de Banach de funções contínuas em $\mathbb{T}$ satisfazendo as condições* i) *e* ii)*. Se $a(z) \in \mathcal{C}^{\pm}$ e $a(z) \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{T}_{\pm}$, então $a^{-1}(z) \in \mathcal{C}^{\pm}$.*

**Definição 2.5** *Seja $\mathcal{C}$ uma álgebra de Banach de funções contínuas em $\mathbb{T}$, satisfazendo as condições* i) *e* ii)*. Diz-se que $\mathcal{C}$ é decomponível se*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \oplus \mathcal{C}^{-,0}$$

*onde $\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^{-,0}$ são as subálgebras definidas em (2.10).*

Note-se que para as álgebras de funções contínuas em $\mathbb{T}$ não se permite que as subálgebras $\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^{-,0}$ sejam quaisquer subálgebras fechadas tais que $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \oplus \mathcal{C}^{-,0}$, mas apenas as que resultam das definições dadas em (2.10). A razão desta restrição é o seguinte resultado:

**Proposição 2.4** *Nas condições da definição anterior, $\mathcal{C}$ é decomponível se e só se o operador integral singular $S_{\mathbb{T}}$ é limitado em $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ é decomponível então $P_+ = \frac{1}{2}(I + S_{\mathbb{T}})$ (respectivamente, $P_- = \frac{1}{2}(I - S_{\mathbb{T}})$) é o operador de projecção sobre $\mathcal{C}^+$ ($\mathcal{C}^{-,0}$) ao longo de $\mathcal{C}^{-,0}$ ($\mathcal{C}^+$).*

Podemos agora introduzir o conceito de factorização numa álgebra decomponível de funções contínuas.

**Definição 2.6** *Seja $\mathcal{C}$ uma álgebra decomponível de funções contínuas em $\mathbb{T}$. Chama-se $\mathcal{C}$-factorização de $a \in G\mathcal{C}$ a qualquer representação da forma*

$$a(t) = a_-(t)t^\kappa a_+(t) \tag{2.11}$$

*em que $a_-^{\pm 1} \in \mathcal{C}^-$, $a_+^{\pm 1} \in \mathcal{C}^+$ e $\kappa \in \mathbb{Z}$.*

*Se $\kappa = 0$ a factorização de $a$ diz-se canónica.*

Note-se que, nas condições desta definição uma $\mathcal{C}$-factorização de $a \in \mathcal{C}$ é uma factorização de $a$ relativamente a $\mathbb{T}$ no sentido da Definição 2.4. Assim, o número $\kappa$ é univocamente determinado por $a$, $\kappa = \text{ind}\ a$, e os factores $a_\pm$ de duas factorizações de $a$ são múltiplos um do outro.

Obviamente que apenas as funções $a \in \mathcal{C}$ não singulares em $\mathbb{T}$ (ou seja, os elementos invertíveis de $\mathcal{C}$) podem admitir uma $\mathcal{C}$-factorização.

A próxima proposição (ver, por exemplo, [4]) mostra o papel fundamental da propriedade de decomposição no problema de factorização em álgebras de Banach de funções contínuas. Esta propriedade será generalizada ao caso matricial na secção seguinte.

**Proposição 2.5** *Seja $\mathcal{C}$ uma álgebra de Banach de funções contínuas. Para que todo o elemento $a \in G\mathcal{C}$ admita uma $\mathcal{C}$-factorização relativamente a $\mathbb{T}$ é necessário e suficiente que a álgebra $\mathcal{C}$ seja decomponível.*

Definido o conceito de factorização de funções contínuas, vamos relacioná-lo com o estudo dos operadores integrais singulares, definidos em $L_2(\mathbb{T})$, da forma

$$T_{a,b} = aP_+ + bP_-$$

e

$$\widetilde{T}_{a,b} = P_+ aI + P_- bI,$$

com coeficientes contínuos $a$ e $b$ (ver, por exemplo, [15], Capítulo 3).

Enunciemos um resultado que relaciona os operadores integrais singulares da forma $T_{a,b}$ e $\widetilde{T}_{a,b}$:

**Teorema 2.7** *Sejam $a, b \in GL_\infty(\mathbb{T})$. Então*

$$D_1(aP_+ + bP_-)D_2 = P_+ aI + P_- bI,$$

*onde $D_1$ e $D_2$ são operadores invertíveis*

$$D_1 = (I + P_+ ab^{-1} P_-) b^{-1} I \quad e \quad D_2 = (I - P_- ab^{-1} P_+) bI.$$

Enunciamos a seguir um resultado que relaciona a invertibilidade do operador integral singular $T_{a,b}$ (e, consequentemente, a invertibilidade do operador integral singular $\widetilde{T}_{a,b}$) com coeficientes contínuos, com o conceito de factorização.

**Teorema 2.8** *Sejam $a, b \in GC(\mathbb{T})$ tais que a função $c = a^{-1}b$ admite uma factorização em relação a $\mathbb{T}$, $c(t) = c_-(t) t^\kappa c_+(t)$. O operador*

$$T_{a,b} = aP_+ + bP_- = a(P_+ + cP_-)$$

*admite inverso se $\kappa = 0$, e, nesse caso,*

$$T_{a,b}^{-1} = \left(c_+ P_+ + c_-^{-1} P_-\right) c_+^{-1} a^{-1} I.$$

Já tivemos ocasião de referir que o conceito de factorização considerado para funções contínuas em $\mathbb{T}$ (Definição 2.4) não permite garantir a existência de factorização para todas as funções $a \in C(\mathbb{T})$ que não se anulam em $\mathbb{T}$. De seguida vamos utilizar um conceito mais geral de factorização de uma função, que não só permita resolver o problema acima mencionado, mas que permita considerar uma classe de funções mais geral, as funções essencialmente limitadas em $\mathbb{T}$.

**Definição 2.7** *Sejam $a \in GL_\infty(\mathbb{T})$. Diz-se que a função a admite uma factorização generalizada em (ou em relação a) $L_2(\mathbb{T})$ se pode ser representada na forma*

$$a(t) = a_-(t)t^\kappa a_+(t), \tag{2.12}$$

*em que $\kappa \in \mathbb{Z}$ e*

*i)* $a_-^{\pm 1} \in L_2^-(\mathbb{T})$ *e* $a_+^{\pm 1} \in L_2^+(\mathbb{T})$

*ii) o operador $a_+P_+a_+^{-1}I$ é limitado em $L_2(\mathbb{T})$.*

*A factorização diz-se canónica se $\kappa = 0$.*

Façamos desde já algumas observações em relação à definição anterior:

(1) Pode parecer estranho que a condição *ii)* figure na definição de factorização de uma função. No entanto, no caso da factorização generalizada em $L_2(\mathbb{T})$ ser canónica, se tal corresponder (como nas outras noções de factorização) à invertibilidade em $L_2(\mathbb{T})$ do operador $T_{1,a} = a_+(a_+^{-1}P_+ + a_-P_-)$, então para garantir que o inverso continue a representar-se por $\left(a_+P_+ + a_-^{-1}P_-\right) a_+^{-1}I$ deve exigir-se que sejam limitados em $L_2(\mathbb{T})$ os operadores $a_+P_+a_+^{-1}I$ e $a_-^{-1}P_-a_+^{-1}I$. Notando que

o operador $a_-^{-1}P_-a_+^{-1}I = a^{-1}\left(I - a_+P_+a_+^{-1}I\right)$ é limitado em $L_2(\mathbb{T})$ se e só se o for $a_+P_+a_+^{-1}I$, é evidente a necessidade de impor que este operador seja limitado em $L_2(\mathbb{T})$.

(2) Suponha-se que $a \in GL_\infty(\mathbb{T})$ admite duas factorizações generalizadas em $L_2(\mathbb{T})$, digamos

$$a(t) = a_-(t)t^\kappa a_+(t) = \widetilde{a}_-(t)t^{\widetilde{\kappa}}\widetilde{a}_+(t).$$

Então tem-se necessariamente $\kappa = \widetilde{\kappa}$, $\widetilde{a}_- = \alpha a_-$ e $\widetilde{a}_+ = \dfrac{1}{\alpha}\, a_+$, em que $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(3) O número inteiro $\kappa$ na representação (2.12), sendo univocamente determinado pela função $a$, recebe a designação de índice da função $a$ no espaço $L_2(\mathbb{T})$, representando-se por $\kappa = \mathrm{ind}_2 a$.

(4) Os factores da factorização (2.12) podem ser expressos pelas fórmulas

$$a_+(t) = \exp\left\{P_+\log\left(t^{-\kappa}a(t)\right)\right\} \quad \text{e} \quad a_-(t) = \exp\left\{P_-\log\left(t^{-\kappa}a(t)\right)\right\}.$$

(5) Se $a \in C(\mathbb{T})$ é tal que existe uma factorização de $a$ em relação a $\mathbb{T}$ (ver Definição 2.4) então essa é uma factorização generalizada de $a$.

(6) Existem funções $a \in GL_\infty(\mathbb{T})$ que não admitem uma factorização generalizada em $L_2(\mathbb{T})$.

Podemos ainda enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 2.9** *Qualquer função $c \in GC(\mathbb{T})$ admite uma factorização generalizada em $L_2(\mathbb{T})$, onde $\kappa = \mathrm{ind}\, c$.*

Note-se que o conceito de factorização generalizada permite estabelecer fórmulas para o inverso dos operadores integrais singulares associados (ver [15]). Por exemplo, se $c$ admite uma factorização generalizada canónica em $L_2(\mathbb{T})$, $c = c_- c_+$, então o operador $T_{1,c} = P_+ + cP_-$ é invertível e o seu inverso é

$$T_{1,c}^{-1} = \left(c_+ P_+ + c_-^{-1} P_-\right) c_+^{-1} I.$$

## 2.4 Factorização de funções matriciais

Nesta secção sintetizaremos alguns resultados gerais da teoria da factorização de funções com valores matriciais e relacionaremos a invertibilidade de operadores integrais singulares com este conceito de factorização.

Comecemos por introduzir a noção de factorização de funções matriciais cujas componentes pertencem a $C(\mathbb{T})$, relativamente à curva $\mathbb{T}$.

**Definição 2.8** *Diz-se que a função matricial $A \in G[C(\mathbb{T})]_{n,n}$ admite uma factorização esquerda (direita) em relação a $\mathbb{T}$, se pode ser representada na forma*

$$A = A_+ \Lambda A_- \quad (A = A_- \Lambda A_+), \tag{2.13}$$

*onde*

$$A_\pm \in G[C^\pm(\mathbb{T})]_{n,n}$$

*e*

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}[t^{\kappa_1}, \cdots, t^{\kappa_n}], \quad (t \in \mathbb{T}) \tag{2.14}$$

*com $\kappa_1 \geq \cdots \geq \kappa_n$ inteiros.*

Aos $\kappa_i$, $i = \overline{1,n}$, chamamos os índices parciais esquerdos (direitos) da factorização.

A soma de todos os índices parciais será denominada por índice total da factorização, sendo denotada por $\kappa = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i$.

Se $\kappa_1 = \cdots = \kappa_n = 0$, então $A = A_+ A_-$ $(A = A_- A_+)$ diz-se uma factorização canónica esquerda (direita), relativamente a $\mathbb{T}$.

O resultado seguinte (que também se pode enunciar para a factorização direita em relação a $\mathbb{T}$) refere-se à unicidade dos índices parciais (ver, por exemplo, [4] e [29]).

**Teorema 2.10** *Seja $A \in G[C(\mathbb{T})]_{n,n}$. Se a função matricial $A$ admite duas factorizações*

$$A = A_+ \Lambda A_- \quad e \quad A = \widetilde{A}_+ \widetilde{\Lambda} \widetilde{A}_-,$$

*relativamente a $\mathbb{T}$, onde $\Lambda$ e $\widetilde{\Lambda}$ são funções matriciais diagonais da forma (2.14), então $\Lambda = \widetilde{\Lambda}$.*

Vamos agora enunciar um resultado que relaciona duas factorizações distintas de uma função matricial $A$ (ver, por exemplo, [4] e [29]).

**Teorema 2.11** *Se a função matricial $A \in G[C(\mathbb{T})]_{n,n}$ admite uma factorização em relação a $\mathbb{T}$, $A = A_+ \Lambda A_-$, então os factores de qualquer outra factorização $A = \widetilde{A}_+ \Lambda \widetilde{A}_-$, são dados por*

$$\widetilde{A}_+ = A_+ H_+ \tag{2.15}$$

*e*

$$\widetilde{A}_- = \Lambda^{-1} H_+^{-1} \Lambda A_- \tag{2.16}$$

*onde $H_+ = \left[h_{ij}^+\right]$ é uma função matricial não singular cujas componentes satisfazem*

*i)* $h_{ij}^+ = 0$, *se* $\kappa_j > \kappa_i$, *ii)* $h_{ij}^{+}$ *é uma constante, se* $\kappa_j = \kappa_i$,

*iii)* $h_{ij}^{+}$ *é um polinómio de grau menor ou igual a* $\kappa_i - \kappa_j$, *se* $\kappa_j < \kappa_i$.

*Inversamente, se* $H_+$ *é uma função matricial polinomial não singular cujas componentes têm as propriedades* $i)$, $ii)$ *e* $iii)$, *então* $A$ *admite uma factorização* $A = \widetilde{A}_+ \Lambda \widetilde{A}_-$, *onde os factores* $\widetilde{A}_\pm$ *são da forma* (*2.15*) *e* (*2.16*).

Com as devidas adaptações, é também possível enunciar um resultado similar para o caso de uma factorização direita em relação a $\mathbb{T}$.

Se a função matricial $A \in G[C(\mathbb{T})]_{n,n}$ admite uma factorização (2.13), então a função $\det A(t)$, $(t \in \mathbb{T})$ admite a factorização

$$\det A(t) = \det\left[A_+(t)\right] t^{\kappa} \det\left[A_-(t)\right],$$

relativamente a $\mathbb{T}$.

Como $\operatorname{ind}\left[\det A_\pm\right] = 0$, vem que $\kappa = \operatorname{ind}\left[\det A\right]$.

Devido a (2.1), nem todas as funções matriciais $A \in G[C(\mathbb{T})]_{n,n}$ admitem uma factorização em relação a $\mathbb{T}$. Assim, como na secção 2.3, surge a necessidade de, ou restringir o conjunto de funções matriciais contínuas por forma a garantir a existência de factorização para os elementos dessa classe ou estender o conceito de factorização por forma a permitir que os factores pertençam a um espaço de funções matriciais que não o das contínuas.

Em primeiro lugar, devemos fazer referência ao caso particular das funções matriciais racionais e que interessa considerar separadamente, pois trata-se de uma classe muito especial uma vez que, tal como acontece no caso escalar, é possível obter explicitamente uma factorização de qualquer elemento pertencente a $G[R(\mathbb{T})]_{n,n}$.

**Teorema 2.12** *Seja $R \in G[R(\mathbb{T})]_{n,n}$. Então $R$ admite uma factorização*

$$R = R_+ \Lambda R_- \quad (R = R_- \Lambda R_+),$$

*em relação a $\mathbb{T}$, onde $R_\pm \in G[R^\pm(\mathbb{T})]_{n,n}$ e $\Lambda$ é da forma (2.14).*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [4]. Um algoritmo que permite encontrar uma factorização explícita de qualquer função matricial $R \in G[R(\mathbb{T})]_{n,n}$ pode ser consultado em [5].

Analisemos agora uma restrição de $G[C(\mathbb{T})]_{n,n}$ por forma a garantir a existência de factorização.

Seja $\mathcal{C}$ uma álgebra decomponível de funções contínuas em $\mathbb{T}$ e $\mathcal{C}^\pm$ as subálgebras de $\mathcal{C}$ definidas como em (2.10).

**Lema 2.5** *Se $A \in [\mathcal{C}]_{n,n} \quad ([\mathcal{C}^\pm]_{n,n})$ e $detA(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{T} \ (\mathbb{T}_\pm)$, então $A^{-1} \in [\mathcal{C}]_{n,n} \quad ([\mathcal{C}^\pm]_{n,n})$.*

**Definição 2.9** *Diz-se que uma função matricial $A \in G\,[\mathcal{C}]_{n,n}$ admite uma $\mathcal{C}$-factorização esquerda (direita) se $A$ pode ser representada na forma*

$$A = A_+ \Lambda A_- \quad (A = A_- \Lambda A_+),$$

*onde*

$$A_\pm^{\pm 1} \in [\mathcal{C}^\pm]_{n,n} \qquad e \qquad \Lambda \quad \text{é da forma (2.14).}$$

Caso a álgebra $R(\mathbb{T})$ seja densa em $\mathcal{C}$, diz-se que $\mathcal{C}$ é uma $R$-álgebra.

Com estes conceitos podemos obter o seguinte resultado sobre a factorização de funções matriciais numa $R$-álgebra (ver, por exemplo, [4]).

**Teorema 2.13** *Seja $\mathcal{C}$ uma $R$-álgebra decomponível de funções contínuas em $\mathbb{T}$ e $A \in [\mathcal{C}]_{n,n}$. Então $A$ admite uma $\mathcal{C}$-factorização se e só se* $\det A(t) \neq 0$, *$t \in \mathbb{T}$.*

Notemos que existem algumas generalizações deste resultado a álgebras de funções matriciais contínuas que não são $R$-álgebras, como o espaço das funções matriciais contínuas à Hölder (ver, por exemplo. [15] e [29]) e algumas álgebras de funções matriciais de $[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$.

Com o intuito de considerar operadores integrais singulares com coeficientes matriciais essencialmente limitados é necessário introduzir o conceito de factorização generalizada para funções matriciais.

**Definição 2.10** *Diz-se que uma função matricial $A \in G\,[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ admite uma factorização generalizada esquerda (direita) em (ou em relação a) $L_2(\mathbb{T})$ se pode ser representada na forma*

$$A = A_+ \Lambda A_- \quad (A = A_- \Lambda A_+), \tag{2.17}$$

*onde*

*i)* $A_\pm^{\pm 1} \in \left[L_2^\pm(\mathbb{T})\right]_{n,n}$ *e* $\Lambda(t)$ *é da forma (2.14)*

*ii) O operador* $A_+ P_+ A_+^{-1} I \quad (A_- P_+ A_-^{-1} I)$ *é limitado em* $[L_2(\mathbb{T})]_n$.

Se $\kappa_1 = \cdots = \kappa_n = 0$, diz-se que $A$ admite uma factorização generalizada canónica.

Façamos desde já algumas observações em relação à definição anterior:

(1) Caso a factorização de $A$ seja canónica esquerda e se tal corresponder à invertibilidade, em $[L_2(\mathbb{T})]_n$, do operador $T_{1,A} = P_+ + AP_-$, então para garantir que o inverso possa ser representado por $\left(A_+ P_+ + A_-^{-1} P_-\right) A_+^{-1} I$ deve exigir-se que sejam limitados em $[L_2(\mathbb{T})]_n$ os operadores $A_+ P_+ A_+^{-1} I$ e $A_-^{-1} P_- A_+^{-1} I$. Como $A_-^{-1} P_- A_+^{-1} I = A^{-1}\left(I - A_+ P_+ A_+^{-1} I\right)$ é limitado

em $[L_2(\mathbb{T})]_n$ se e só se o for $A_+P_+A_+^{-1}I$, é agora óbvia a necessidade de impor que este operador seja limitado em $[L_2(\mathbb{T})]_n$.

(2) Se $A \in G\,[C(\mathbb{T})]_{n,n}$ é tal que existe uma factorização de $A$ em relação a $\mathbb{T}$ (ver Definição 2.8) então essa é uma factorização generalizada de $A$.

(3) O Teorema 2.10 também é válido para o conceito de factorização generalizada (ver, por exemplo, [29], pág. 59).

**Proposição 2.6** *Se $A \in G\,[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ admite uma factorização generalizada relativamente a $L_2(\mathbb{T})$, então os índices parciais de $A$ são unicamente determinados por $A$.*

(4) Temos uma extensão do Teorema 2.11 (ver, por exemplo, [29], pág.60):

**Teorema 2.14** *Se a função matricial $A \in G\,[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ admite uma factorização generalizada $A = A_+\Lambda A_-$ em $L_2(\mathbb{T})$, então os factores de qualquer outra factorização generalizada $A = \widetilde{A}_+\Lambda\widetilde{A}_-$ em $L_2(\mathbb{T})$ são dados por (2.15) e (2.16), onde $H_+ = \left[h_{ij}^+\right]$ é uma função matricial polinomial não singular com determinante constante, satisfazendo as condições i), ii) e iii) do Teorema 2.11.*

(5) Da Definição 2.9 resulta imediatamente que qualquer $\mathcal{C}$-factorização de $A$ é também uma factorização generalizada em $L_2(\mathbb{T})$. Por outro lado, tendo em conta a forma como se relacionam as diferentes factorizações generalizadas conclui-se que, se $A \in [\mathcal{C}]_{n,n}$, então qualquer factorização generalizada de $A$ em $L_2(\mathbb{T})$ é uma $\mathcal{C}$-factorização ou não existe $\mathcal{C}$-factorização de $A$.

(6) O conceito de factorização generalizada em $L_2(\mathbb{T})$ pode ser também definido no caso da recta real (ver [10]).

Podemos ainda enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 2.15** *Qualquer função matricial* $A \in G\,[C(\mathbb{T})]_{n,n}$ *admite uma factorização generalizada.*

Pode-se demonstrar (ver [4]) que o Teorema 2.7 verifica-se também para funções matriciais. Assim, o estudo da invertibilidade dos operadores integrais singulares com coeficientes em $G\,[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ reduz-se ao estudo do operador integral singular $T_{A,B} = AP_+ + BP_-$.

Enunciaremos agora alguns resultados relativos à relação entre a invertibilidade de operadores integrais singulares e o conceito de factorização generalizada de funções matriciais.

**Teorema 2.16** *A função matricial* $A \in G\,[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ *admite uma factorização generalizada esquerda (direita) em* $L_2(\mathbb{T})$ *se e só se o operador integral singular* $T_{1,A} = P_+ + AP_-$ $(T_{A,1} = AP_+ + P_-)$ *é invertível, bilateral ou unilateralmente, em* $[L_2(\mathbb{T})]_n$*.*

Já foi referido, através da condição $ii$) da Definição 2.10, que o operador $T_{1,A}^{-1} = \left(A_+P_+ + A_-^{-1}P_-\right) A_+^{-1}I$ é um operador limitado em $[L_2(\mathbb{T})]_n$. Temos a condição necessária do

**Teorema 2.17** *A função matricial* $A \in G\,[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ *admite uma factorização generalizada canónica esquerda (direita) em* $L_2(\mathbb{T})$ *se e só se o operador integral singular* $T_{1,A} = P_+ + AP_-$ $(T_{A,1} = AP_+ + P_-)$ *é invertível em* $[L_2(\mathbb{T})]_n$*. E, se o operador* $T_{1,A} = P_+ + AP_-$ $(T_{A,1} = AP_+ + P_-)$ *é invertível então* $T_{1,A}^{-1} = \left(A_+P_+ + A_-^{-1}P_-\right) A_+^{-1}I$ $\left(T_{A,1}^{-1} = \left(A_+^{-1}P_+ + A_-P_-\right) A_-^{-1}I\right)$*.*

A demonstração da condição suficiente pode ser encontrada em [4], pág. 105.

**Teorema 2.18** *Duas factorizações diferentes de uma função matricial $A$, em $L_2(\mathbb{T})$, são ambas factorizações generalizadas ou nenhuma delas o é.*

## 2.5 Problemas de contorno de Riemann

O problema de factorização é considerado paralelamente com o estudo do problema de valores fronteiros de Riemann. Nesta secção será feito um resumo da questão respeitante ao papel desempenhado pela factorabilidade em $L_2(\mathbb{T})$ do coeficiente matricial de um problema de contorno de Riemann para a teoria de solubilidade deste problema.

Sejam $A \in [L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ e $g \in [L_2(\mathbb{T})]_n$ dadas arbitrariamente.

O **problema de contorno de Riemann vectorial** é formulado da seguinte forma: encontrar toda a função $\Phi(z)$ analítica em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$ tal que as funções vectoriais n-dimensionais $\Phi_+(z)$ e $\Phi_-(z)$ sejam analíticas em $\mathbb{T}_+$ e $\mathbb{T}_-$, respectivamente, e os seus valores de fronteira $\Phi_+(t)$ e $\Phi_-(t)$ pertençam a $L_2^+(\mathbb{T})$ e $L_2^{-,0}(\mathbb{T})$, respectivamente, e satisfaçam a condição

$$\Phi_+(t) + A(t)\Phi_-(t) = g(t). \tag{2.18}$$

Consideremos agora o operador integral singular, definido em $[L_2(\mathbb{T})]_n$, da forma

$$T_{1,A} = P_+ + AP_-.$$

A equação

$$T_{1,A}\varphi(t) = g(t) \tag{2.19}$$

está directamente relacionada com problemas de contorno de Riemann. De facto, o problema (2.18) e a equação (2.19) são equivalentes no seguinte sentido:

- Se as funções matriciais $\Phi_+$ e $\Phi_-$ são soluções do problema (2.18), então $\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t)$ é uma solução da equação (2.19).
- Se $\varphi$ é uma solução da equação (2.19), então a função
$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$
é uma solução do problema (2.18).

Daqui em diante vamo-nos concentrar nas funções matriciais factorizáveis em $L_2(\mathbb{T})$.

Seja $A$ uma função matricial não singular admitindo uma factorização em $L_2(\mathbb{T})$,
$$A = A_+ \Lambda A_-, \tag{2.20}$$
onde
$$A_\pm^{\pm 1} \in [L_2^\pm(\mathbb{T})]_{n,n} \;\text{ e }\; \Lambda(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \cdots, t^{\kappa_n}],$$
com $\kappa_1 \geq \cdots \geq \kappa_n$ inteiros.

Enunciemos agora um teorema sobre a solubilidade do problema de contorno de Riemann (ver, por exemplo, [29], pág. 90):

**Teorema 2.19** *Seja $A(t)$ uma função matricial $n \times n$, não singular, admitindo uma factorização (2.20) em $L_2(\mathbb{T})$. Então o número de soluções* *linearmente independentes da equação homogénea $l$ e o número de condições de solubilidade $\rho$ do problema de contorno de Riemann (2.18) são dados por*

$$l = \sum_{j=1}^{n} \max(\kappa_j, 0), \quad \rho = \sum_{j=1}^{n} \max(-\kappa_j, 0).$$

Além disso, as soluções do problema (2.18) podem ser representadas através dos factores da factorização (2.20) e vice-versa.

O resultado seguinte diz-nos como obter a solução geral do problema (2.18) (caso seja solúvel) através dos factores da factorização (2.20) (ver, por exemplo, [29], págs. 45 e 87):

**Teorema 2.20** *Seja $A$ uma função matricial admitindo uma factorização (2.20) em $L_2(\mathbb{T})$. Então*

1) *O problema (2.18) é solúvel se e só se*

i) $A_+^{-1}g \in [\mathcal{L}_1(\mathbb{T})]_n$;

ii) $\Phi_{+,0} = A_+P_+A_+^{-1}g \in [L_2^+(\mathbb{T})]_n$;

iii) $\Phi_{-,0} = A_-^{-1}\Lambda^{-1}P_-A_+^{-1}g \in [L_2^{-,0}(\mathbb{T})]_n$.

2) *Se as condições de 1) são satisfeitas então a solução geral do problema (2.18) é da forma*

$$\Phi_+ = \Phi_{+,0} + A_+\rho, \quad \Phi_- = \Phi_{-,0} + A_-^{-1}\Lambda^{-1}\rho$$

*onde $\rho$ é uma função vectorial, tal que o j-ésimo elemento é um polinómio de grau $\leq \kappa_j - 1$, se $\kappa_j > 0$; e igual a zero, se $\kappa_j \leq 0$.*

No Capítulo 4 precisamos de condições necessárias para a solubilidade do problema (2.18) descritas da seguinte forma (ver, por exemplo, [29], pág. 90):

**Teorema 2.21** *Seja $A$ uma função matricial que admite uma factorização (2.20) em $L_2(\mathbb{T})$. Então para que o problema (2.18) seja solúvel é necessário que, $\forall j = 1, \ldots, n$, com $\kappa_j < 0$, as condições*

$$\int_{\Gamma} (A_+^{-1}(t)g(t))_j \, t^k dt = 0, \quad k = 0, \ldots, -\kappa_j - 1$$

*sejam satisfeitas.*

## 2.6 Factorização de funções matriciais hermiteanas

Nesta secção iremos referir o que foi estabelecido por G. S Litvinchuk e I. M. Spitkovskii sobre uma classe de funções matriciais hermiteanas. Assim, vamos basear-nos na secção 15.7 de [28], que contem relações entre uma função matricial hermiteana de $2^a$ ordem

$$G(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ \overline{b(t)} & d(t) \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

onde as funções $a$, $b$ e $d$ pertencem a $L_\infty(\mathbb{T})$, e uma função matricial

$$\Omega = \begin{pmatrix} |\omega|^2 - 1 & \overline{\omega} \\ \omega & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

onde $\omega$ é uma composição algébrica dos elementos de $G$, para introduzirmos o porquê da nossa escolha relativamente à classe de funções matriciais

$$A_\gamma(b) = \begin{pmatrix} e & b \\ b^* & b^*b + \gamma e \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

onde $\gamma$ é uma constante complexa não nula, $e$ representa a função matricial identidade, $b$ é uma função matricial pertencente a $[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ e $b^*$ é a adjunta hermiteana de $b$. Foi estabelecido que a análise da existência de factorização da função matricial (2.21), quando sujeita a certas restrições, pode ser reduzida ao estudo de uma função matricial do tipo (2.22). Neste caso, a função matricial $\Omega$ admite uma factorização generalizada em $L_2(\mathbb{T})$ se e só se a unidade não pertence ao espectro limite, $\sigma_l$ (isto é, ao conjunto dos pontos limite do espectro e dos valores próprios de multiplicidade infinita), do operador $H(\omega)H^*(\omega)$ ($H(\omega) = P_-\overline{\omega}P_+$ é um operador de Hankel com símbolo $\omega$) e os seus índices parciais são $\pm l$, onde $l$ é a multiplicidade de 1 como um valor próprio do operador $H(\omega)H^*(\omega)$.

Consideremos a função matricial hermiteana (2.21) e vamos concentrar-nos no caso quando a função matricial $G$ admite uma factorização generalizada esquerda em $L_2(\mathbb{T})$, (2.17). Assim,

$$\det G(t) = \Delta(t) = a(t)d(t) - |b(t)|^2$$

é invertível em $L_\infty(\mathbb{T})$. Em [28], assume-se que $\Delta(t) < 0$, em q.t.p. em $\mathbb{T}$. Assim, a função $\Delta(t)$ também admite uma factorização em $L_2(\mathbb{T})$ (ver [28], pág. 157)

$$\Delta = -|\Delta_+|^2,$$

onde

$$\Delta_+^{\pm 1} \in H_\infty.$$

É assumido, adicionalmente, que um dos elementos diagonais (por exemplo, $d$) de $G$ também preserva o seu sinal em q.t.p. em $\mathbb{T}$ e é invertível em $L_\infty(\mathbb{T})$, ou seja, $d(t)$ admite uma factorização em $L_2(\mathbb{T})$ da forma

$$d = \varepsilon |d_+|^2,$$

onde $d_+^{\pm 1} \in H_\infty$ e $\varepsilon$ representa o valor do sinal de $d$.

Introduzimos a função

$$\omega = \frac{\overline{b}\,\overline{d}_+^2}{\overline{\Delta}_+\, d}\,, \tag{2.24}$$

e construímos a função matricial (2.22).

Seja

$$X_+ = \begin{pmatrix} \Delta_+ d_+^{-1} & 0 \\ 0 & d_+ \end{pmatrix}.$$

Como a função matricial $X_+$ pertence, juntamente com a sua inversa

$$X_+^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_+^{-1} d_+ & 0 \\ 0 & d_+^{-1} \end{pmatrix},$$

à classe $[H_\infty]_{2,2}$, segue de

$$G = \varepsilon X_+ \Omega X_+^*, \tag{2.25}$$

que as funções matriciais (2.21) e (2.22) admitem uma factorização generalizada esquerda somente simultaneamente, e que os seus índices parciais coincidem. Assim, sem perda de generalidade, podemos concentrar-nos no estudo da função matricial (2.22).

Enunciemos agora um resultado sobre a factorabilidade de uma função matricial da forma (2.22) e sobre os seus índices parciais (ver [29], pág. 289 e [28], pág 158).

**Teorema 2.22** *A função matricial*

$$\Omega = \begin{pmatrix} |\omega|^2 - 1 & \overline{\omega} \\ \omega & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega \in L_\infty(\mathbb{T}),$$

*admite uma factorização generalizada em $L_2(\mathbb{T})$ se e só se a unidade não pertence ao espectro limite do operador $N_-(\omega) = P_-\overline{\omega}P_+\omega P_-$ e os seus índices parciais são $\pm l$, onde $l$ é a multiplicidade de* 1 *como valor próprio de $N_-(\omega)$.*

Podemos agora acrescentar algo ao descrito em [28].

Por hipótese, a função matricial $G$ admite uma factorização generalizada esquerda em $L_2(\mathbb{T})$. Assim, a função matricial $\Omega$ também admite uma factorização generalizada esquerda em $L_2(\mathbb{T})$

$$\Omega = \Omega_+ \,\Lambda\, \Omega_-,$$

onde

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{\kappa} & 0 \\ 0 & t^{-\kappa} \end{pmatrix}$$

e

$$\kappa = \dim Ker\,(N_-(\omega) - I)\,.$$

Assim, a função matricial $G$ admite a seguinte factorização generalizada onde os factores surgem representados através dos factores de uma factorização generalizada esquerda de $\Omega$, que podem ser determinados explicitamente através das soluções de duas equações integrais não homogéneas (ver Capítulos 3 e 4).

Temos

$$G = G_+ \,\Lambda\, G_-,$$

onde

$$G_+ = \varepsilon X_+ \,\Omega_+$$

e

$$G_- = \Omega_- \, X_+^*.$$

Um resultado similar, envolvendo uma factorização generalizada direita em $L_2(\mathbb{T})$, seria obtido se tivesse sido escolhida a função $a(t)$ como sendo o elemento diagonal preservando o sinal em q.t.p. em $\mathbb{T}$ e invertível em $L_\infty(\mathbb{T})$.

O caso quando $\Delta(t) > 0$, em q.t.p. em $\mathbb{T}$, será analisado no final da secção 4.3.

# Capítulo 3

# Resolução de equações integrais

Este Capítulo é dedicado à resolução de equações integrais da forma

$$(N_+(b) + \gamma I)\,\omega_+(t) = g_+(t), \tag{3.1}$$

onde a função $b \in H_{\infty,r}$.

Na secção 3.1 introduzimos dois operadores autoadjuntos $N_\pm(b)$, definidos em $[L_2(\mathbb{T})]_{n,n}$, e analisamos algumas das suas propriedades quando $b \in [L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$. Estudamos, em particular, o caso quando $-\gamma \in \rho(N_+(b))$ e as componentes de $b$ pertencem à álgebra de Douglas. Notamos que, caso a função matricial $b$ admita uma decomposição $b = b_+ + b_-$, onde $b_+$, $b_-^*$ $\in [H_\infty]_{n,n}$, então os operadores $N_\pm(b)$ não dependem da função matricial $b_-$.

Na secção 3.2 consideramos o caso quando $b \in H_{\infty,r}$. Elaboramos um algoritmo que permite resolver as equações do tipo (3.1) e cujas soluções nos vão possibilitar (ver Capítulo 4) a determinação de uma factorização generalizada explícita de uma classe de funções matriciais. Começamos por estudar a solubilidade de (3.1) quando $b \in L_\infty(\mathbb{T})$. De seguida, considerando $b \in H_{\infty,r}$ e utilizando propriedades das funções internas e externas, chegamos a um sistema linear de $p$ equações e $p$ incógnitas que dará a solução, ou soluções, da equação (3.1), quando solúvel. Analisamos esse sistema em duas situações distintas, quando $-\gamma$ pertence ao conjunto resolvente de $N_+(b)$ e quando $-\gamma$ é um valor próprio de multiplicidade finita.

Terminamos com um exemplo para ilustrar a aplicação do algoritmo descrito.

## 3.1 Propriedades dos operadores $N_+(b)$ e $N_-(b)$

Seja $b \in [L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$. Denotemos por $\rho(N_+(b))$ o conjunto resolvente do operador $N_+(b)$ e por $\sigma_T(N_+(b))$ o seu espectro. Seja

$$\sigma(N_+(b)) = \sigma_T(N_+(b)) \backslash \sigma_l(N_+(b)),$$

onde $\sigma_l(N_+(b))$ representa o espectro limite de $N_+(b)$.

Começamos por analisar algumas propriedades dos operadores

$$N_\pm(b) : [L_2(\mathbb{T})]_{n,n} \longrightarrow [L_2(\mathbb{T})]_{n,n},$$

$$N_+(b) = P_+bP_-b^*P_+ \ \text{ e } \ N_-(b) = P_-b^*P_+bP_-,$$

onde $b^*$ é a adjunta hermiteana de $b$.

**1)**

$$N_+(b) = M_+(b)M_+^*(b) \ \text{ e } \ N_-(b) = M_+^*(b)M_+(b),$$

onde $M_+(b) = P_+bP_-$.

**2)**

$N_\pm(b)$ são operadores autoadjuntos e positivos.

**3)** Seja $U : U\varphi(t) = t^{-1}\overline{\varphi(t)}$. Tem-se que

$$U\left(N_{\pm}(b) + \gamma I\right)U = N_{\mp}(b) + \overline{\gamma} I, \ \forall \gamma \in \mathbb{C}.$$

**Demonstração.**

Seja $\varphi_+(t) + \varphi_-(t) = \varphi(t) \in L_2(\mathbb{T})$. Como

$$US_{\mathbb{T}} = -S_{\mathbb{T}}U,$$

pois

$$(US_{\mathbb{T}})\,\varphi(t) = \left[U(P_+ - P_-)\right]\varphi(t) = U(\varphi_+(t) - \varphi_-(t)) = t^{-1}\overline{\varphi_+(t)} - t^{-1}\overline{\varphi_-(t)}$$

$$= P_-\left(t^{-1}\overline{\varphi(t)}\right) - P_+\left(t^{-1}\overline{\varphi(t)}\right) = (P_- - P_+)U\varphi(t) = -\left(S_{\mathbb{T}}U\right)\varphi(t),$$

temos que

$$U\left(N_{\pm}(b) + \gamma I\right)U = N_{\mp}(b) + \overline{\gamma} I$$

■

**4)**

$$\sigma_T(N_{\pm}(b)) \subset \mathbb{R}_0^+. \tag{3.2}$$

**Nota:** Como $0 \in \sigma_T(N_{\pm}(b))$, $\forall\ b$, consideraremos, daqui em diante, $\gamma \neq 0$.

**5)** Se $-\gamma \in \sigma\left(N_{\pm}(b)\right)$, então

$$L_2(\mathbb{T}) = \mathrm{Im}\left(N_{\pm}(b) + \gamma I\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(N_{\pm}(b) + \gamma I\right). \tag{3.3}$$

**Demonstração.**

Como $N_{\pm}(b)$ são operadores autoadjuntos e $\gamma$ é real $(-\gamma \in \sigma\left(N_{\pm}(b)\right))$, vem que os operadores $N_{\pm}(b) + \gamma I$ também são autoadjuntos. ■

Das propriedades 3) e 4) resulta imediatamente a seguinte propriedade.

**6)**

$$\sigma_T(N_+(b)) = \sigma_T(N_-(b)).$$

**7)**

$$\dim\mathrm{Ker}(N_+(b) + \gamma I) = \dim\mathrm{Ker}(N_-(b) + \gamma I).$$

**Demonstração.**

Se $-\gamma \in \rho(N_-(b))(= \rho(N_+(b)))$, então

$$\dim\mathrm{Ker}(N_-(b) + \gamma I) = 0 = \dim\mathrm{Ker}(N_+(b) + \gamma I).$$

Para $-\gamma \in \sigma(N_-(b)) \subset \mathbb{R}_0^+$, temos que

$$N_-(b) + \gamma I = U\left(N_+(b) + \gamma I\right)U.$$

Assim,

$$\dim\mathrm{Ker}\left(N_-(b) + \gamma I\right) = \dim\mathrm{Ker}\left(N_+(b) + \gamma I\right).$$

■

**Proposição 3.1** *Se* $-\gamma \in \sigma\left(N_+(b)\right)$, *então*

$$\dim\mathrm{Ker}(N_+(b) + \gamma I) = \kappa,$$

*onde* $\kappa$ *é a soma dos índices parciais positivos de uma factorização generalizada esquerda da função matricial*

$$A_\gamma(b) = \begin{pmatrix} e & b \\ b^* & b^*b + \gamma e \end{pmatrix}.$$

**Demonstração.**

Para $-\gamma \in \sigma(N_-(b)) \subset \mathbb{R}_0^+$, temos que $\gamma \leq 0$. Assim, $A_\gamma(b)$ é uma função matricial hermiteana. Nesse caso, uma sua factorização generalizada tem como índices parciais

$$\{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n, -\kappa_n, \ldots, -\kappa_2, -\kappa_1\}$$

(ver [29], pág. 258). Seja

$$\kappa = \kappa_1 + \ldots + \kappa_n.$$

Pelo Teorema 2.19 temos que $\kappa$ corresponde também ao número de soluções linearmente independentes da equação que envolve o operador de Toeplitz $T(\Omega) = P_-(\Omega)|_{\mathrm{Im}P_-}$,

$$P_-(\Omega)|_{\mathrm{Im}P_-}\varphi = g, \tag{3.4}$$

pois estudar o operador $T(\Omega)$ relativamente às propriedades de Fredholm é equivalente a estudar o operador $P_+ + \Omega P_-$. Mas, a equação (3.4) pode ser reescrita na forma de sistema. De facto, considerando

$$\Omega = A_\gamma(b), \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in [L_2^{-,0}(\mathbb{T})]_{2n} \ \text{ e } \ g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in [L_2^{-,0}(\mathbb{T})]_{2n},$$

temos

$$\begin{cases} \varphi_1 + P_-(b\varphi_2) = g_1 \\ P_-\left(b^*\varphi_1\right) + P_-\left(b^*b + \gamma e\right)\varphi_2 = g_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = g_1 - P_-(b\varphi_2) \\ P_-\left(b^*g_1\right) - P_-\left(b^*P_-b\varphi_2\right) + P_-\left(b^*b\varphi_2\right) + \gamma\varphi_2 = g_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = g_1 - P_-(b\varphi_2) \\ \left(N_-(b) + \gamma I\right)\varphi_2 = g_2 - P_-\left(b^*g_1\right) \end{cases}.$$

Assim, os operadores $T\left(A_\gamma(b)\right)$ e $N_-(b)+\gamma I$ são de Fredholm somente simultaneamente e os seus números de defeito coincidem. Podemos concluir que em $(N_-(b)+\gamma I)\varphi = 0$ temos o mesmo número de soluções linearmente independentes do que em $T\left(A_\gamma(b)\right)\varphi = 0$, ou seja, $\kappa$. Logo,

$$\mathrm{dimKer}(N_-(b)+\gamma I) = \kappa.$$

■

Além destas propriedades devemos reparar que se a função matricial $b$ pode ser representada como

$$b = b_+ + b_-,$$

onde

$$b_+,\ b_-^* \in [H_\infty]_{n,n},$$

então os operadores $N_\pm(b)$ não dependem da função matricial $b_-$.

Analisemos agora o caso quando a função matricial $b$ pertence à álgebra de todas as funções matriciais cujas componentes pertencem à álgebra de Douglas. Neste caso, $N_\pm(b)$ são operadores compactos (ver Lema 2.1) e os correspondentes operadores resolventes podem ser representados através dos seus valores próprios e respectivas funções próprias.

Assim, introduzindo o operador $K$,

$$K(\psi) = \sum_k \frac{\lambda_k(\psi,\nu_k^+)}{\lambda_k+\gamma}\nu_k^+,$$

onde $\{\nu_k^+\}$ é um sistema ortonormal em $[L_2(\mathbb{T})]_n$ formado pelas funções próprias do operador $N_+(b)$ (considerando-o definido em $[L_2(\mathbb{T})]_n$) e onde $\lambda_k$ são os valores próprios correspondentes, temos o seguinte resultado:

**Proposição 3.2** *Se* $-\gamma \in \rho(N_+(b))$, *então o operador resolvente de* $N_+(b)$ *é dado por*

$$R(N_+(b), -\gamma I)\Psi = \frac{1}{\gamma}\Psi - \frac{1}{\gamma}K(\Psi),$$

*onde* $\Psi = [\psi_1, \ldots, \psi_n]$ *e* $K(\Psi) = [K(\psi_1), \ldots, K(\psi_n)]$.

**Demonstração.** Analisemos o operador autoadjunto $N_+(b)$, aplicado a $\varphi \in [L_2(\mathbb{T})]_{n,n}$, considerando

- $\varphi = [\varphi_1; \ldots; \varphi_n]$, onde $\varphi_i \in [L_2(\mathbb{T})]_n$, $\forall i = 1, \cdots, n$

- $N_+(b)\varphi$ tem a forma $N_+(b)\varphi = [N_+(b)\varphi_1; \ldots; N_+(b)\varphi_n]$, com

$$N_+(b)\varphi_j = \sum_k \lambda_k(\varphi_j, \nu_k^+)\nu_k^+.$$

Se

$$(N_+(b) + \gamma I)\varphi_j = \psi_j$$

vem que

$$\varphi_j = -\frac{1}{\gamma}\left(\sum_k \lambda_k(\varphi_j, \nu_k^+)\nu_k^+ - \psi_j\right).$$

Assim, para todo o $n$, obtemos

$$(\lambda_n + \gamma)(\varphi_j, \nu_n^+) = (\psi_j, \nu_n^+).$$

Como $-\gamma \neq \lambda_n$ (pois $\lambda_k$ são valores próprios de $N_+(b)$), então

$$\varphi_j = -\frac{1}{\gamma}\left(\sum_k \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \gamma}(\psi_j, \nu_k^+)\nu_k^+ - \psi_j\right).$$

Obtemos

$$R(N_+(b), -\gamma I)\psi_j = \frac{1}{\gamma}\psi_j - \frac{1}{\gamma}K(\psi_j)$$

■

Analisemos agora um caso particular.

**Teorema 3.1** *Seja* $b \in [H_\infty]_{n,n}$ *uma função matricial tal que* $b^*b = e = bb^*$. *Se* $\gamma \neq -1$, *então*

$$(N_+(b) + \gamma I)^{-1} = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma}N_+(b) - I\right). \tag{3.5}$$

**Demonstração.** Notemos que se $b$ é tal que $b^*b = e = bb^*$ (para $n = 1$, $b$ é uma função interna) temos que o operador $N_+(b)$ é um operador idempotente, isto é,

$$N_+^2(b) = N_+(b).$$

Podemos concluir que $\sigma\left(N_+(b)\right) = \{0, 1\}$. Assim, não é difícil provar (3.5), pois

$$(N_+(b) + \gamma I)\left[-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma}N_+(b) - I\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma}N_+(b) - N_+(b) + \frac{\gamma}{1+\gamma}N_+(b) - \gamma I\right) = I$$

De igual modo se demonstra que

$$\left[-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma}N_+(b) - I\right)\right](N_+(b) + \gamma I) = I$$

■

Assim, quando $b^*b = e = bb^*$ e $\gamma \neq -1$, temos, por exemplo, que

i)

$$(N_+(b) + \gamma I)^{-1} e = \frac{1}{\gamma(1+\gamma)}\left(\gamma e + bb^*(0)\right), \tag{3.6}$$

pois

$$(N_+(b) + \gamma I)^{-1} e = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma}N_+(b) - I\right) e$$

$$= -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma}N_+(b)e - e\right) = -\frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{1+\gamma}\left(P_+ - bP_+b^*I\right)e - e\right]$$

$$= -\frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{1+\gamma}\left(e - bb^*(0)\right) - e\right] = \frac{1}{\gamma(1+\gamma)}\left(\gamma e + bb^*(0)\right)$$

ii)

$$(N_+(b)+\gamma I)^{-1}\, b = \frac{1}{\gamma} b, \tag{3.7}$$

pois

$$\begin{aligned}(N_+(b)+\gamma I)^{-1}\, b &= -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma}N_+(b)-I\right) b \\ = -\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{1}{1+\gamma}\left[P_+b - bP_+\left(b^*b\right)\right]-b\right\} &= \frac{1}{\gamma} b.\end{aligned}$$

## 3.2 Algoritmo para resolução da equação $(N_+(b)+\gamma I)\omega_+(t)=g_+(t)$

Nesta secção construímos um algoritmo que nos permite resolver equações solúveis da forma (3.1)

$$(N_+(b)+\gamma I)\omega_+(t)=g_+(t)$$

quando a função $b \in H_{\infty,r}$.

### 3.2.1 Sobre a solubilidade de $(N_+(b)+\gamma I)\omega_+(t)=g_+(t)$

Seja $b \in L_\infty(\mathbb{T})$.

Comecemos por reparar que se $-\gamma \in \rho\left(N_+(b)\right)$, então a equação (3.1) é sempre unicamente solúvel,

$$\omega_+(t)=(N_+(b)+\gamma I)^{-1} g_+(t).$$

Neste caso, será demonstrado no Capítulo 4 que conseguimos obter uma factorização canónica de uma classe de funções matriciais através das soluções das equações integrais não homogéneas

$$(N_+(b)+\gamma I)u_+ = 1 \;\text{ e }\; (N_+(b)+\gamma I)v_+ = b.$$

Quando $-\gamma \in \sigma(N_+(b))$, então a equação (3.1) pode ser ou não solúvel. Se (3.1) é solúvel, então podemos resolvê-la através do algoritmo que iremos descrever nesta secção. Em particular, se $g_+(t) \equiv 0$, o algoritmo dá-nos o

$$\mathrm{Ker}(N_+(b) + \gamma I).$$

Como a equação (3.1) é solúvel se e só se $g_+(t) \in \mathrm{Im}(N_+(b) + \gamma I)$ e $L_2(\mathbb{T}) = \mathrm{Ker}(N_+(b)+\gamma I) \oplus \mathrm{Im}(N_+(b)+\gamma I)$ (ver (3.3)), resolvendo a equação homogénea correspondente ficamos a conhecer também a

$$\mathrm{Im}(N_+(b) + \gamma I).$$

Desta forma, sabemos se uma dada equação é ou não solúvel.

Podemos ainda analisar a questão do seguinte modo:

- se $N_+(b)g_+(t) = -\gamma g_+(t)$, então $(N_+(b)+\gamma I)g_+(t) = 0$. Assim, $g_+(t) \in \mathrm{Ker}(N_+(b) + \gamma I)$. Logo, $g_+(t) \notin \mathrm{Im}(N_+(b) + \gamma I)$. Concluímos que (3.1) não é solúvel.

- se $N_+(b)g_+(t) \neq -\gamma g_+(t)$, então $g_+(t) \notin \mathrm{Ker}(N_+(b) + \gamma I)$. No entanto, $g_+(t)$ pode pertencer ou não a $\mathrm{Im}(N_+(b) + \gamma I)$. Ou seja, a equação (3.1) pode ser ou não solúvel.

Por exemplo, se $b(t) = \theta(t)$, onde $\theta(t)$ é uma função interna, temos que $N_+(b) = P_\theta$ (ver Lema 2.4). Logo, $\sigma(N_+(b)) = \{0, 1\}$. Assim, se $\gamma \neq -1$ temos que a equação (3.1) é unicamente solúvel. Se $\gamma = -1$, podem ocorrer várias situações. De facto, como

$$N_+(b)1 = 1 - \overline{\theta(0)}\theta$$

e

$$N_+(b)b = P_+bP_-\overline{b}b = 0 \ (\neq -\gamma b),$$

- se $1 - \overline{\theta(0)}\theta(t) = -\gamma, \ \forall\, t \in \mathbb{T}$, então a equação $(N_+(b) + \gamma I)u_+ = 1$ não é solúvel e a equação $(N_+(b) + \gamma I)v_+ = b$ pode ser ou não solúvel

- se $1 - \overline{\theta(0)}\theta(t) \neq -\gamma, \ \forall\, t \in \mathbb{T}$, então a equação $(N_+(b) + \gamma I)u_+ = 1$ e a equação $(N_+(b) + \gamma I)v_+ = b$ podem ser ou não solúveis

Iremos ver no Capítulo 4 uma classe de funções matriciais $2 \times 2$ que admitem uma factorização generalizada esquerda não canónica, $A = A_+ \Lambda A_-$, quando $-\gamma \in \sigma\left(N_+(b)\right)$. Para obtermos uma factorização generalizada explícita da função matricial em questão, dependendo do factor $A_-(\infty)$, devemos resolver as equações não homogéneas da forma (3.1),

$$i) \ \ (N_+(b) + \gamma I)x_+ = \gamma \ \text{ e } \ (N_+(b) + \gamma I)y_+ = \gamma P_+(br_\kappa) \tag{3.8}$$

$$ii) \ \ (N_+(b) + \gamma I)x_+ = \gamma r_\kappa \ \text{ e } \ (N_+(b) + \gamma I)y_+ = \gamma P_+ b \tag{3.9}$$

$$iii) \ \ (N_+(b) + \gamma I)x_+ = \gamma r_{1,\kappa} \ \text{ e } \ (N_+(b) + \gamma I)y_+ = \gamma P_+(br_{2,\kappa}) \tag{3.10}$$

onde $r_\kappa$, $r_{1,\kappa}$ e $r_{2,\kappa}$ são polinómios de grau $\kappa = \dim\mathrm{Ker}(N_+(b) + \gamma I)$ determinados utilizando (3.3). Para tal utilizaremos o algoritmo que iremos descrever nesta secção.

### 3.2.2 Caso $b = r\theta$

Vamos então construir um algoritmo que nos permitirá resolver a equação (3.1) (quando solúvel), quando $b \in H_{\infty,r}$.

Seja $b = r\theta$, onde $\theta$ é uma função interna e $r$ é uma função racional externa.

Sem perda de generalidade (o caso quando $r(t) \equiv 1$ será tratado no exemplo 4.6.1) podemos considerar que a função $r(t)$ se pode representar desta forma

$$r(t) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{\beta_i}}{\prod_{j=1}^{n}(t-\mu_j)^{\alpha_j}}, \tag{3.11}$$

onde $\alpha_j, \beta_i \in \mathbf{N}$, $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$, e $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n\}$ tem $m+n$ elementos distintos tais que $|\lambda_i| > 1$, $\forall i = \overline{1,m}$ e $|\mu_j| > 1$ $\forall j = \overline{1,n}$.

Para resolver a equação (3.1), vamos considerar a substituição

$$\omega_+ = \frac{1}{\overline{r}}\,\psi. \tag{3.12}$$

Obtemos

$$P_+\left[r\,\theta P_-\left(\overline{\theta}\,\psi\right)\right] + \gamma\frac{1}{\overline{r}}\,\psi = g_+. \tag{3.13}$$

Como $P_- = I - P_+$ e $P_\theta = P_+ - \theta P_+ \overline{\theta} I$, temos a seguinte equação, equivalente a (3.1),

$$rP_\theta\,\psi + \gamma\frac{1}{\overline{r}}\,\psi + P_+\left(r\psi_-\right) = g_+, \qquad \psi_- = P_-\psi, \tag{3.14}$$

isto é,

$$\psi = \frac{1}{\gamma}\,\left[\overline{r}g_+ - |r|^2 P_\theta\,\psi - \overline{r}P_+\left(r\psi_-\right)\right]. \tag{3.15}$$

Sabemos (ver Lema 2.3) que

$$\underbrace{(P_\theta\,\psi)(t)}_{\in H_2 \ominus \theta H_2} = t^{-1}\theta(t)\overline{x_+(t)}, \tag{3.16}$$

onde $x_+ \in H_2$. Assim,

$$\psi(t) = \frac{1}{\gamma}\,\left\{\overline{r(t)}g_+(t) - |r(t)|^2 t^{-1}\theta(t)\,\overline{x_+(t)} - \overline{r(t)}P_+\left[(r\psi_-)(t)\right]\right\}. \tag{3.17}$$

Aplicando $P_\theta$ a (3.17) e usando (3.16) obtemos

$$t^{-1}\theta(t)\,\overline{x_+(t)} = \frac{1}{\gamma}\left[P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right) - T_1 x_+(t) - T_2\psi_-(t)\right], \tag{3.18}$$

onde

$$T_1 x_+(t) = P_\theta \left( \frac{|r(t)|^2}{t}\, \theta(t)\, \overline{x_+(t)} \right) \tag{3.19}$$

e

$$T_2 \psi_-(t) = P_\theta \left\{ \overline{r(t)}\ P_+ \left[ (r\psi_-)(t) \right] \right\}. \tag{3.20}$$

Precisamos de encontrar $\overline{x_+}$ e $\psi_-$ para obtermos a solução de (3.1),

$$\omega_+(t) = \frac{1}{\gamma} \left\{ g_+(t) - r(t)\, t^{-1} \theta(t)\, \overline{x_+(t)} - P_+ \left[ (r\psi_-)(t) \right] \right\}. \tag{3.21}$$

Vamos agora reescrever os operadores $T_1$ e $T_2$ utilizando operadores de dimensão finita, que dependem de $p$ constantes que podem ser determinadas através de um sistema linear de $p$ equações.

**O operador $T_1$**

Para reescrever o operador $T_1$ numa forma mais apropriada para resolver a equação (3.1) precisamos de analisar a função

$$\frac{|r(t)|^2}{t} = t^{l_0} \frac{\prod_{i=1}^{m} (t-\lambda_i)^{\beta_i} (1-\overline{\lambda_i}\ t)^{\beta_i}}{\prod_{j=1}^{n} (t-\mu_j)^{\alpha_j} (1-\overline{\mu_j}\ t)^{\alpha_j}}\ , \tag{3.22}$$

onde

$$l_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j - \sum_{i=1}^{m} \beta_i - 1,$$

decomposta numa soma de fracções elementares.

Se considerarmos

$$k_0 = \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j - 1 = -l_0 - 2, \tag{3.23}$$

precisamos de analisar três casos diferentes:

- $k_0 \geq 0$ (isto é, $l_0 \leq -2$), onde

$$\frac{|r(t)|^2}{t} = \sum_{l=0}^{k_0} a_l\, t^l + \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{l=1}^{\alpha_j} \left[ \frac{b_{jl}}{(t-\mu_j)^l} + \frac{c_{jl}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} \right] \right\} + \sum_{l=1}^{k_0+2} \frac{d_l}{t^l}; \tag{3.24}$$

- $k_0 = -1$ (isto é, $l_0 = -1$), onde

$$\frac{|r(t)|^2}{t} = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{l=1}^{\alpha_j} \left[ \frac{b_{jl}^*}{(t-\mu_j)^l} + \frac{c_{jl}^*}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} \right] \right\} + \frac{d_1^*}{t}; \tag{3.25}$$

- $k_0 \leq -2$ (isto é, $l_0 \geq 0$), onde

$$\frac{|r(t)|^2}{t} = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{l=1}^{\alpha_j} \left[ \frac{b_{jl}^{**}}{(t-\mu_j)^l} + \frac{c_{jl}^{**}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} \right] \right\}. \tag{3.26}$$

Para simplificar $T_1 x_+(t)$ temos de calcular

$$P_\theta(t^l \theta(t)\overline{x_+(t)}),\ P_\theta \frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{(t-\mu_j)^l},\ P_\theta \frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} \text{ e } P_\theta \frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{t^l}. \tag{3.27}$$

Usando a definição de $P_\theta$ e o facto de $\theta$ ser uma função interna, temos:

**Proposição 3.3**

$$P_\theta \left( t^l \theta(t)\ \overline{x_+(t)} \right) = \theta(t) \left( t^l\ \overline{x_+(t)} - \sum_{i=1}^{l+1} A_i\ t^{l+1-i} \right), \quad l \geq 0, \tag{3.28}$$

*onde*

$$A_i = \frac{\overline{x_+^{(i-1)}(0)}}{(i-1)!}. \tag{3.29}$$

**Demonstração.**

Para $l = 0$ temos

$$\begin{aligned} P_\theta \left( \theta(t)\overline{x_+(t)} \right) &= \theta(t)\overline{x_+(t)} - \theta(t) P_+ \left( \overline{\theta(t)} \theta(t) \overline{x_+(t)} \right) \\ &= \theta(t)\overline{x_+(t)} - \theta(t) P_+ \overline{x_+(t)} \\ &= \theta(t)\overline{x_+(t)} - \overline{x_+(0)}\ \theta(t) \\ &= \theta(t) \left( \overline{x_+(t)} - \overline{x_+(0)} \right). \end{aligned}$$

Para $l > 0$ temos

$$\begin{aligned} P_\theta\left(t^l\theta(t)\,\overline{x_+(t)}\right) &= \left(P_+ - \theta(t)P_+\overline{\theta(t)}I\right)\left(t^l\,\theta(t)\,\overline{x_+(t)}\right) \\ &= t^l\,\theta(t)\,\overline{x_+(t)} - \theta(t)P_+\left(t^l\,\overline{x_+(t)}\right) \\ &= \theta(t)\left[t^l\ \ \overline{x_+(t)} - P_+\left(t^l\,\overline{x_+(t)}\right)\right]. \end{aligned}$$

Vamos agora simplificar $P_+\left(t^l\,\overline{x_+(t)}\right)$. Numa vizinhança de 0 temos que

$$x_+(t) = x_+(0) + x'_+(0)\,t + \frac{x''_+(0)}{2!}\,t^2 + \cdots + \frac{x_+^{(l)}(0)}{l!}\,t^l + \frac{x_+^{(l+1)}(0)}{(l+1)!}\,t^{l+1} + \cdots.$$

Assim,

$$t^l\overline{x_+(t)} = \overline{x_+(0)}\,t^l + \overline{x'_+(0)}\,t^{l-1} + \overline{\frac{x''_+(0)}{2!}}\,t^{l-2} + \cdots + \overline{\frac{x_+^{(l)}(0)}{l!}} + \overline{\frac{x_+^{(l+1)}(0)}{(l+1)!}}\,t^{-1} + \cdots.$$

Obtemos (3.28) ∎

Notemos que precisamos de $P_\theta(t^l\theta(t)\overline{x_+(t)})$ somente quando $k_0 \geq 0$. E, nesse caso, desta parte, existem $k_0 + 1$ constantes a determinar em $T_1 x_+(t)$.

**Proposição 3.4**

$$P_\theta\frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{(t-\mu_j)^l} = \theta(t)\left[\frac{\overline{x_+(t)}}{(t-\mu_j)^l} - \sum_{i=1}^{l}\frac{B_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}\right], \quad l \geq 1, \tag{3.30}$$

*onde*

$$B_{ij} = \frac{x_-^{(i-1)}(\mu_j)}{(i-1)!}, \quad x_-(t) = \overline{x_+(t)} \quad e \quad |\mu_j| > 1. \tag{3.31}$$

**Demonstração.**

$$P_\theta\frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{(t-\mu_j)^l} = \left(P_+ - \theta(t)P_+\overline{\theta(t)}I\right)\frac{\theta(t)x_-(t)}{(t-\mu_j)^l} = \frac{\theta(t)x_-(t)}{(t-\mu_j)^l} - \theta(t)P_+\frac{x_-(t)}{(t-\mu_j)^l}$$

$$= \frac{\theta(t)x_-(t)}{(t-\mu_j)^l} - \theta(t)P_+\left[\left(\underbrace{\frac{x_-(t)-x_-(\mu_j)}{t-\mu_j}}_{=y_-(t)} + \underbrace{\frac{x_-(\mu_j)}{t-\mu_j}}_{(+)}\right)\underbrace{\frac{1}{(t-\mu_j)^{l-1}}}_{(+)}\right]$$

$$= \frac{\theta(t)x_-(t)}{(t-\mu_j)^l} - \frac{x_-(\mu_j)\theta(t)}{(t-\mu_j)^l} - \theta(t)P_+\left[\left(\underbrace{\frac{y_-(t)-y_-(\mu_j)}{t-\mu_j}}_{=z_-(t)} + \underbrace{\frac{y_-(\mu_j)}{t-\mu_j}}_{(+)}\right)\underbrace{\frac{1}{(t-\mu_j)^{l-2}}}_{(+)}\right]$$

$$= \frac{\theta(t)x_-(t)}{(t-\mu_j)^l} - \frac{x_-(\mu_j)\theta(t)}{(t-\mu_j)^l} - \frac{x_-^{'}(\mu_j)\theta(t)}{(t-\mu_j)^{(l-1)}} - \theta(t)P_+\left[\frac{z_-(t)}{(t-\mu_j)^{l-2}}\right]$$

$$= \theta(t)\left[\frac{x_-(t)}{(t-\mu_j)^l} - \sum_{i=1}^{l}\frac{x_-^{(i-1)}(\mu_j)}{(i-1)!(t-\mu_j)^{l-i+1}}\right],\ l \geq 1.$$

**Nota:** Numa vizinhança de $\mu_j$ temos que

$$x_-(t) = x_-(\mu_j) + x_-^{'}(\mu_j)(t-\mu_j) + \frac{x_-^{''}(\mu_j)}{2!}(t-\mu_j)^2 + \cdots .$$

Assim,

$$y_-(t) = x_-^{'}(\mu_j) + \frac{x_-^{''}(\mu_j)}{2!}(t-\mu_j) + \cdots$$

e

$$y_-(\mu_j) = x_-^{'}(\mu_j).$$

Da mesma forma,

$$z_-(t) = \frac{x_-^{''}(\mu_j)}{2!} + \frac{x_-^{'''}(\mu_j)}{3!}(t-\mu_j) + \cdots$$

e

$$z_-(\mu_j) = \frac{x_-^{''}(\mu_j)}{2!}.$$

Seguindo este raciocínio obtemos (3.30) ■

Desta parte, existem $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$ constantes a determinar em $T_1x_+(t)$.

**Proposição 3.5**

$$P_\theta \frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} = \frac{1}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l}\left[\theta(t)\overline{x_+(t)} - \sum_{i=1}^{l} C_{ij}(t-\frac{1}{\overline{\mu_j}})^{i-1}\right], \quad l \geq 1, \tag{3.32}$$

*onde*

$$C_{ij} = \frac{(\theta x_-)^{(i-1)}(\frac{1}{\overline{\mu_j}})}{(i-1)!} \quad e \quad |\mu_j| > 1. \tag{3.33}$$

**Demonstração.**

$$P_\theta \frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} = \Big(P_+ - \theta(t)P_+\overline{\theta(t)}I\Big)\frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l}$$

$$= P_+\frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} = \left(-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^l P_+ \frac{(\theta x_-)(t)}{\left(t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^l}$$

$$= \left(-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^l P_+ \left\{\left[\underbrace{\frac{(\theta x_-)(t) - (\theta x_-)\left(\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)}{t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}}}_{=y_+(t)} + \underbrace{\frac{(\theta x_-)\left(\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)}{t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}}}_{(-)}\right]\underbrace{\frac{1}{\left(t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^{l-1}}}_{(-)}\right\}$$

$$= \left(-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^l P_+ \left\{\left[\underbrace{\frac{y_+(t) - y_+\left(\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)}{t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}}}_{=z_+(t)} + \underbrace{\frac{y_+\left(\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)}{t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}}}_{(-)}\right]\underbrace{\frac{1}{\left(t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^{l-2}}}_{(-)}\right\}$$

$$= \left(-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^l P_+ \frac{z_+(t)}{\left(t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^{l-2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^l \frac{\theta(t)\overline{x_+(t)} - \sum_{i=1}^{l}\frac{(\theta x_-)^{(i-1)}(\frac{1}{\overline{\mu_j}})}{(i-1)!}\left(t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^{i-1}}{\left(t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^l}, \ l \geq 1.$$

**Nota:** Numa vizinhança de $\frac{1}{\mu_j}$ temos que

$$(\theta x_-)(t) = (\theta x_-)\left(\frac{1}{\mu_j}\right)+(\theta x_-)'\left(\frac{1}{\mu_j}\right)\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right)+\frac{(\theta x_-)''\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{2!}\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right)^2+\cdots .$$

Assim,

$$y_+(t) = (\theta x_-)'(\frac{1}{\mu_j}) + \frac{(\theta x_-)''\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{2!}\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right)+\cdots$$

e

$$y_+\left(\frac{1}{\mu_j}\right) = (\theta x_-)'\left(\frac{1}{\mu_j}\right).$$

Da mesma forma,

$$z_+(t) = \frac{(\theta x_-)''\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{2!} + \frac{(\theta x_-)'''\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{3!}\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right)+\cdots$$

e

$$z_+\left(\frac{1}{\mu_j}\right) = \frac{(\theta x_-)''\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{2!}.$$

Seguindo este raciocínio obtemos (3.32) ■

Desta parte, existem $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$ constantes a determinar em $T_1x_+(t)$.

**Proposição 3.6**

$$P_\theta\frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{t} = \frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{t},$$

$$P_\theta\frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{t^l} = \frac{1}{t^l}\left(\theta(t)\overline{x_+(t)} - \sum_{i=1}^{l-1} D_i\, t^i\right), \quad l\geq 2, \tag{3.34}$$

*onde*

$$D_i = \frac{(\theta x_-)^{(i)}(0)}{i!}. \tag{3.35}$$

**Demonstração.**

Como $t^{-1}\theta(t)\overline{x_+(t)} \in H_2 \ominus \theta H_2$, podemos utilizar a propriedade (2.5) e obter

$$P_\theta\left(t^{-1}\theta(t)\overline{x_+(t)}\right) = t^{-1}\theta(t)\overline{x_+(t)}.$$

Para $l \geq 2$ temos

$$\begin{aligned} P_\theta \frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{t^l} &= \left(P_+ - \theta(t)P_+\overline{\theta(t)}\ I\right)\frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{t^l} \\ &= P_+\frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{t^l} = P_+\frac{(\theta x_-)(t)}{t^l} \\ &= P_+\left\{\left[\underbrace{\frac{(\theta x_-)(t)-(\theta x_-)(0)}{t}}_{=y_+(t)} + \frac{((\theta x_-)(0)}{t}\right]\underbrace{\frac{1}{t^{l-1}}}_{(-)}\right\} \\ &= P_+\left(y_+(t)\frac{1}{t^{l-1}}\right) \end{aligned}$$

pois numa vizinhança de 0 temos que

$$\underbrace{(\theta x_-)(t)}_{(+)} = (\theta x_-)(0) + (\theta x_-)'(0)\ t + \frac{(\theta x_-)''(0)}{2!}\ t^2 + \cdots$$

e $t^{-1}\theta(t)\overline{x_+(t)} \in H_2 \ominus \theta H_2$, vindo $(\theta x_-)(0) = 0$.

Continuando o raciocínio temos

$$\begin{aligned} P_\theta \frac{\theta(t)\overline{x_+(t)}}{t^l} &= P_+\left[\left(\underbrace{\frac{y_+(t)-y_+(0)}{t}}_{=z_+(t)} + \underbrace{\frac{y_+(0)}{t}}_{(-)}\right)\underbrace{\frac{1}{t^{l-2}}}_{(-)}\right] \\ &= P_+\frac{z_+(t)}{t^{l-2}} = \frac{(\theta x_-)(t) - \sum_{i=1}^{l-1}\frac{(\theta x_-)^{(i)}(0)}{i!}\ t^i}{t^l}. \end{aligned}$$

**Nota:** Numa vizinhança de 0 temos que

$$y_+(t) = (\theta x_-)'(0) + \frac{(\theta x_-)''(0)}{2!}\ t + \cdots$$

e

$$y_+(0) = (\theta x_-)'(0).$$

Da mesma forma,

$$z_+(t) = \frac{(\theta x_-)''(0)}{2!} + \frac{(\theta x_-)'''(0)}{3!}\, t + \cdots$$

e

$$z_+(0) = \frac{(\theta x_-)''(0)}{2!}.$$

Seguindo este raciocínio obtemos (3.34) ■

Desta parte, existem $k_0 + 1$ constantes a determinar em $T_1 x_+(t)$.

Assim, temos de encontrar em $T_1 x_+(t)$:

- para $k_0 \geq -1$,

  $2\sum_{i=1}^{m} \beta_i$ $(= 2k_0 + 2 + 2\sum_{j=1}^{n} \alpha_j)$ constantes que dependem de $\overline{x_+(t)}$ $(A_i,\ D_i,\ i = \overline{1, k_0+1};$ e $B_{ij},\ C_{ij},\ i = \overline{1, \alpha_j},\ j = \overline{1, n})$;

- para $k_0 \leq -2$,

  $2\sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ constantes que dependem de $\overline{x_+(t)}$ $(B_{ij},\ C_{ij},\ i = \overline{1, \alpha_j},\ j = \overline{1, n})$.

Então, temos

$$T_1 x_+(t) = t^{-1}\, \theta(t)\overline{x_+(t)}|r(t)|^2 - \theta(t) K_1 x_+(t) - K_2 x_+(t), \tag{3.36}$$

onde

1) $(k_0 \geq 0)$

$$K_1 x_+(t) = \sum_{l=0}^{k_0} a_l \sum_{i=1}^{l+1} A_i\, t^{l-i+1} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} b_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{B_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}} \tag{3.37}$$

e

$$K_2 x_+(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} \frac{c_{jl}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} \sum_{i=1}^{l} C_{ij} \left(t - \frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^{i-1} + \sum_{l=1}^{k_0+2} \frac{d_l}{t^l} \sum_{i=1}^{l-1} D_i\ t^i. \quad (3.38)$$

**Demonstração.**

$$T_1 x_+(t) = \theta(t)\overline{x_+(t)} \sum_{l=0}^{k_0} a_l\ t^l - \theta(t) \sum_{l=0}^{k_0} a_l \sum_{i=1}^{l+1} A_i\ t^{l+1-i} +$$

$$+\theta(t)\overline{x_+(t)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} \left( \frac{b_{jl}}{(t-\mu_j)^l} + \frac{c_{jl}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} \right) -$$

$$-\theta(t) \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} b_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{B_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} \frac{c_{jl}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} \sum_{i=1}^{l} C_{ij} (t - \frac{1}{\overline{\mu_j}})^{i-1}$$

$$+\theta(t)\overline{x_+(t)} \sum_{l=1}^{k_0+2} \frac{d_l}{t^l} - \sum_{l=1}^{k_0+2} \frac{d_l}{t^l} \sum_{i=1}^{l-1} D_i\ t^i$$

$$= t^{-1}\ \theta(t)\overline{x_+(t)} |r(t)|^2 - \theta(t) \sum_{l=0}^{k_0} a_l \sum_{i=1}^{l+1} A_i\ t^{l+1-i} -$$

$$-\theta(t) \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} b_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{B_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} \frac{c_{jl}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} \sum_{i=1}^{l} C_{ij} \left(t - \frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^{i-1} - \sum_{l=1}^{k_0+2} \frac{d_l}{t^l} \sum_{i=1}^{l-1} D_i\ t^i$$

■

De forma análoga, temos

2) $(k_0 = -1)$

$$K_1 x_+(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} b^*_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{B_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}} \quad (3.39)$$

e

$$K_2x_+(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j} \frac{c^*_{jl}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} \sum_{i=1}^{l} C_{ij}\left(t - \frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^{i-1}. \tag{3.40}$$

3) $(k_0 \leq -2)$

$$K_1x_+(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j} b^{**}_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{B_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}} \tag{3.41}$$

e

$$K_2x_+(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j} \frac{c^{**}_{jl}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l} \sum_{i=1}^{l} C_{ij}\left(t - \frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^{i-1}. \tag{3.42}$$

**O operador $T_2$**

Para simplificar

$$T_2\psi_-(t) = P_+\left\{\overline{r(t)}P_+\left[(r\psi_-)(t)\right]\right\} - \theta(t)P_+\left[\overline{\theta(t)}\ \overline{r(t)}P_+\left[(r\psi_-)(t)\right]\right\}, \tag{3.43}$$

precisamos de analisar a função $r(t)$ decomposta numa soma de fracções elementares.

Temos dois casos:

- $k_0 \geq -1$ (isto é, $l_0 \leq -1$), onde

$$r(t) = \sum_{l=0}^{k_0+1} f_l\ t^l + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j} \frac{g_{jl}}{(t-\mu_j)^l}; \tag{3.44}$$

- $k_0 \leq -2$ (isto é, $l_0 \geq 0$), onde

$$r(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j} \frac{g^*_{jl}}{(t-\mu_j)^l}. \tag{3.45}$$

Para simplificar $T_2\psi_-(t)$, temos de determinar primeiro

$$P_+\left[(r\psi_-)(t)\right]. \tag{3.46}$$

Assim, temos de calcular

$$P_+(t^l\psi_-(t)) \ \text{ e } \ P_+\frac{\psi_-(t)}{(t-\mu_j)^l}. \tag{3.47}$$

**Proposição 3.7**

$$P_+\psi_-(t) = 0, \quad P_+(t^l\psi_-(t)) = \sum_{i=1}^{l} E_i\, t^{l-i}, \quad l \geq 1, \tag{3.48}$$

*onde*

$$E_i = \frac{\overline{\varphi_+^{(i)}(0)}}{i!} \quad e \quad \varphi_+(t) = \overline{\psi_-(t)}. \tag{3.49}$$

**Demonstração.**

Numa vizinhança de 0 temos que

$$\varphi_+(t) = \varphi_+(0) + \varphi_+^{'}(0)\, t + \frac{\varphi_+^{''}(0)}{2!}\, t^2 + \frac{\varphi_+^{'''}(0)}{3!}\, t^3 + \cdots ,$$

com $\varphi_+(0) = 0$ (pois $\psi_-(t) = P_-\psi(t)$). Assim,

$$\psi_-(t) = \overline{\varphi_+^{'}(0)}\, t^{-1} + \frac{\overline{\varphi_+^{''}(0)}}{2!}\, t^{-2} + \frac{\overline{\varphi_+^{'''}(0)}}{3!} t^{-3} + \cdots .$$

Assim,

$$P_+\psi_-(t) = 0,$$

$$P_+(t\ \psi_-(t)) = \overline{\varphi_+^{'}(0)}$$

e

$$P_+(t^2\ \psi_-(t)) = \overline{\varphi_+^{'}(0)}\ t + \frac{\overline{\varphi_+^{''}(0)}}{2!}.$$

Seguindo este raciocínio obtemos para $l \geq 1$

$$P_+(t^l\psi_-(t)) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\overline{\varphi_+^{(i)}(0)}}{i!}\ t^{l-i}$$

■

Precisamos de $P_+(t^l\psi_-(t))$ somente quando $k_0 \geq 0$. E, nesse caso, dessa parte, existem $k_0 + 1$ constantes a determinar em $T_2\psi_-(t)$.

**Proposição 3.8**

$$P_+ \frac{\psi_-(t)}{(t-\mu_j)^l} = \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}, \quad l \geq 1, \tag{3.50}$$

*onde*

$$F_{ij} = \frac{\psi_-^{(i-1)}(\mu_j)}{(i-1)!} \quad \text{e} \quad |\mu_j| > 1. \tag{3.51}$$

**Demonstração.**

É análoga à demonstração da Proposição (3.4) ■

Dessa parte, existem $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ constantes a determinar em $T_2\psi_-(t)$.

Assim,

1) $(k_0 \geq 0)$

$$P_+ \left[(r\psi_-)(t)\right] = \sum_{l=1}^{k_0+1} f_l \sum_{i=1}^{l} E_i \, t^{l-i} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} g_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}; \tag{3.52}$$

2) $(k_0 \leq -1)$

$$P_+ \left[(r\psi_-)(t)\right] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} g_{jl}^* \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}. \tag{3.53}$$

O passo seguinte é simplificar

$$P_+ \left\{ \overline{r(t)} P_+ \left[r\psi_-)(t)\right] \right\}. \tag{3.54}$$

Temos dois casos:

- $k_0 \geq 0$, onde

$$\begin{aligned} & P_+ \left\{ \overline{r(t)} P_+ \left[(r\psi_-)(t)\right] \right\} \\ = {} & P_+ \left\{ \overline{r(t)} \left[ \sum_{l=1}^{k_0+1} f_l \sum_{i=1}^{l} E_i \, t^{l-i} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} g_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}} \right] \right\}; \end{aligned} \tag{3.55}$$

- $k_0 \leq -1$, onde

$$P_+ \left\{\overline{r(t)} P_+ \left[(r\psi_-)(t)\right]\right\} = P_+ \left\{\overline{r(t)} \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} g_{jl}^* \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}\right]\right\}. \tag{3.56}$$

Só temos funções racionais. Assim, temos simplesmente de decompô-las em fracções elementares e escolher as fracções sem pólos em $\mathbb{T}_+$.

O passo seguinte é simplificar

$$P_+ \left\{\overline{\theta(t)}\ \overline{r(t)} P_+ \left[(r\psi_-)(t)\right]\right\}. \tag{3.57}$$

Temos dois casos:

- $k_0 \geq 0$, onde

$$P_+ \left\{\overline{\theta(t)}\ \overline{r(t)} P_+ \left[(r\psi_-)(t)\right]\right\}$$
$$= P_+ \left\{\overline{\theta(t)}\ \overline{r(t)} \left[\sum_{l=1}^{k_0+1} f_l \sum_{i=1}^{l} E_i\, t^{l-i} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} g_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}\right]\right\}; \tag{3.58}$$

- $k_0 \leq -1$, onde

$$P_+ \left\{\overline{\theta(t)}\ \overline{r(t)} P_+ \left[(r\psi_-)(t)\right]\right\} = P_+ \left\{\overline{\theta(t)}\ \overline{r(t)} \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} g_{jl}^* \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}\right]\right\}. \tag{3.59}$$

Precisamos de calcular

$$P_+ \left(\overline{\theta(t)}\ t^l\right),\ P_+ \frac{\overline{\theta(t)}}{(t-\mu_j)^l} \text{ e } P_+ \frac{\overline{\theta(t)}}{(1-\overline{\mu_j}\ t)^l}. \tag{3.60}$$

**Proposição 3.9**

$$P_+ \left(\overline{\theta(t)}\ t^l\right) = \sum_{i=0}^{l} \frac{\overline{\theta^{(i)}(0)}}{i!}\ t^{l-i}, \quad l \geq 0. \tag{3.61}$$

**Demonstração.**

É análoga à demonstração da Proposição (3.3) ■

**Proposição 3.10**

$$P_+ \frac{\overline{\theta(t)}}{(t-\mu_j)^l} = \sum_{i=1}^{l} \frac{y_-^{(i-1)}(\mu_j)}{(i-1)!(t-\mu_j)^{l-i+1}}, \quad l \geq 1, \tag{3.62}$$

*onde*

$$y_-(t) = \overline{\theta(t)} \quad e \quad |\mu_j| > 1.$$

**Demonstração.**

É análoga à demonstração da Proposição (3.4) ■

Notamos que

$$P_+ \frac{\overline{\theta(t)}}{(1-\overline{\mu_j}\, t)^l} = 0, \tag{3.63}$$

onde $|\mu_j| > 1$.

Podemos concluir que temos somente funções racionais em (3.57). Assim sendo, temos simplesmente de decompô-las em fracções elementares e escolher as fracções sem pólos em $\mathbb{T}_+$.

Então, temos de encontrar em $T_2\psi_-(t)$:

- para $k_0 \geq -1$,

  $k_0+1+\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_i$ constantes que dependem de $\psi_-(t)$ ($E_i,\ i = \overline{1, k_0+1}; F_{ij},\ i = \overline{1,\alpha_j},\ j = \overline{1,n}$);

- para $k_0 \leq -2$,

  $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ constantes que dependem de $\psi_-(t)$ ($F_{ij},\ i = \overline{1,\alpha_j},\ j = \overline{1,n}$).

Temos

$$T_2\psi_-(t) = K_3\psi_-(t) - \theta(t)\; K_4\psi_-(t), \tag{3.64}$$

onde $K_3\psi_-(t)$ e $K_4\psi_-(t)$ são funções racionais dependendo de $\frac{p}{3}$ constantes que temos de determinar,

1) $(k_0 \geq 0)$

$$K_3\psi_-(t) = P_+\left\{\overline{r(t)}\left[\sum_{l=1}^{k_0+1} f_l \sum_{i=1}^{l} E_i\; t^{l-i} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j} g_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}\right]\right\} \tag{3.65}$$

e

$$K_4\psi_-(t) = P_+\left\{\overline{\theta(t)}\;\overline{r(t)}\left[\sum_{l=1}^{k_0+1} f_l \sum_{i=1}^{l} E_i\; t^{l-i} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j} g_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}\right]\right\}. \tag{3.66}$$

De forma análoga, temos para

2) $(k_0 \leq -1)$

$$K_3\psi_-(t) = P_+\left\{\overline{r(t)}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j} g^*_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}\right]\right\} \tag{3.67}$$

e

$$K_4\psi_-(t) = P_+\left\{\overline{\theta(t)}\;\overline{r(t)}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j} g^*_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}\right]\right\}. \tag{3.68}$$

De (3.17) e (3.18) podemos concluir que as funções $x_+$ e $\psi_-$ dependem das $p$ constantes que surgem em $T_1x_+(t)$ e $T_2\psi_-(t)$. Assim, vamos ver como podemos obter um sistema de $p$ equações que nos permita determinar essas constantes.

**Como determinar as constantes $A_i$, $B_{ij}$, $C_{ij}$, $D_i$, $E_i$ e $F_{ij}$?**

É agora possível ver que (3.18) pode ser reescrita como

$$t^{-1}\theta(t)\,\overline{x_+(t)} = \frac{1}{\gamma}\left[P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right) - t^{-1}\theta(t)\overline{x_+(t)}|r(t)|^2 + \theta(t)\ K_1x_+(t)\right.$$
$$\left. +K_2x_+(t) - K_3\psi_-(t) + \theta(t)\ K_4\psi_-(t)\right], \tag{3.69}$$

isto é,

$$\underbrace{t^{-1}\theta(t)\,\overline{x_+(t)}}_{(+)} = \frac{P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right) + \theta(t)\ K_1x_+(t) + K_2x_+(t) - K_3\psi_-(t) + \theta(t)\ K_4\psi_-(t)}{\gamma + |r(t)|^2}. \tag{3.70}$$

Como a função $t^{-1}\theta(t)\,\overline{x_+(t)}$ não tem pólos em $\mathbb{T}_+\cup\mathbb{T}$, os zeros de $\gamma+|r(t)|^2$, com multiplicidade $q$, que pertencem a $\mathbb{T}_+\cup\mathbb{T}$ devem ser zeros da função $f_1^{(l)}(t),\ l=\overline{0,q-1}$, onde

$$f_1(t) = P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right) + \theta(t)\ K_1x_+(t) + K_2x_+(t) - K_3\psi_-(t) + \theta(t)\ K_4\psi_-(t). \tag{3.71}$$

Temos também que

$$\underbrace{\overline{x_+(t)}}_{(-)} = \frac{t\ \left[y_-(t)P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right) + K_1x_+(t) + y_-(t)K_2x_+(t) - y_-(t)\ K_3\psi_-(t) + K_4\psi_-(t)\right]}{\gamma + |r(t)|^2}. \tag{3.72}$$

Como a função $\overline{x_+(t)}$ não tem pólos em $\mathbb{T}_-\cup\mathbb{T}$, os zeros de $\gamma+|r(t)|^2$, com multiplicidade $q$, que pertencem a $\mathbb{T}_-\cup\mathbb{T}$, devem ser zeros de $f_2^{(l)}(t)$, $l=\overline{0,q-1}$, onde

$$f_2(t) = y_-(t)P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right)+K_1x_+(t)+y_-(t)K_2x_+(t)-y_-(t)\ K_3\psi_-(t)+K_4\psi_-(t). \tag{3.73}$$

Podemos concluir que $f_1^{(l)}(t)$ e $f_2^{(l)}(t)$ dependem linearmente de $p$ constantes

$$p = \begin{cases} 3\sum_{i=1}^{m}\beta_i, & k_0 \geq -1 \\ \\ 3\sum_{j=1}^{n}\alpha_j, & k_0 \leq -2 \end{cases}, \tag{3.74}$$

relacionadas com $\overline{x_+(t)}$ e $\psi_-(t)$. E, pode ser provado que o número de zeros de $\gamma+|r(t)|^2$ e o número de constantes a determinar que aparecem em $T_1 x_+(t)$ coincidem: $\frac{2p}{3}$. De facto, como

$$\gamma+|r(t)|^2 = \frac{\gamma\ \prod_{j=1}^{n}\left[(t-\mu_j)^{\alpha_j}(1-\overline{\mu_j}\ t)^{\alpha_j}\right] + t^{l_0+1}\prod_{i=1}^{m}\left[(t-\lambda_i)^{\beta_i}(1-\overline{\lambda_i}\ t)^{\beta_i}\right]}{\prod_{j=1}^{n}\left[(t-\mu_j)^{\alpha_j}(1-\overline{\mu_j}\ t)^{\alpha_j}\right]}, \tag{3.75}$$

temos que

- Se $k_0 \leq -2$, ou seja, se $l_0 \geq 0$, então o numerador de $\gamma+|r(t)|^2$ é um polinómio de grau

  $\max(2\sum_{j=1}^{n}\alpha_j, l_0+1+2\sum_{i=1}^{m}\beta_i) = \max(2\sum_{j=1}^{n}\alpha_j, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j+\sum_{i=1}^{m}\beta_i)$

  $= 2\sum_{j=1}^{n}\alpha_j = \frac{2p}{3}$, pois $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j \geq \sum_{i=1}^{m}\beta_i + 1$;

- Se $k_0 \geq -1$, ou seja, se $l_0 \leq -1$, então

  $$\gamma+|r(t)|^2 = \frac{\gamma\ t^{-l_0-1}\ \prod_{j=1}^{n}\left[(t-\mu_j)^{\alpha_j}(1-\overline{\mu_j}\ t)^{\alpha_j}\right] + \prod_{i=1}^{m}\left[(t-\lambda_i)^{\beta_i}(1-\overline{\lambda_i}\ t)^{\beta_i}\right]}{t^{-l_0-1}\prod_{j=1}^{n}\left[(t-\mu_j)^{\alpha_j}(1-\overline{\mu_j}\ t)^{\alpha_j}\right]}.$$

  O numerador é um polinómio de grau

  $\max(-l_0-1+2\sum_{j=1}^{n}\alpha_j, 2\sum_{i=1}^{m}\beta_i) = \max(\sum_{i=1}^{m}\beta_i+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j, 2\sum_{i=1}^{m}\beta_i)$

  $= 2\sum_{i=1}^{m}\beta_i = \frac{2p}{3}$, pois $\sum_{i=1}^{m}\beta_i \geq \sum_{j=1}^{n}\alpha_j$.

Assim, precisamos de calcular os zeros de $\gamma+|r(t)|^2$. Depois temos de exigir que esses números sejam zeros da função $f_1^{(l)}(t)$, $l = \overline{0, q-1}$ (quando esses números pertencem a $\mathbb{T}_+ \cup \mathbb{T}$) ou da função $f_2^{(l)}(t)$ (quando esses números pertencem a $\mathbb{T}_-$). Obtemos um sistema linear com $\frac{2p}{3}$ equações e $p$ variáveis.

Para encontrar as restantes $\frac{p}{3}$ equações de que precisamos, temos de analisar a função

$$\psi_-(t) = \frac{1}{\gamma} P_- \left\{ \overline{r(t)} g_+(t) - t^{-1}\theta(t)\, \overline{x_+(t)} |r(t)|^2 - \overline{r(t)} P_+ \left[ (r\psi_-)(t) \right] \right\}. \quad (3.76)$$

Precisamos de simplificar

$$P_- \left( \overline{r(t)} g_+(t) \right), \; P_- \left( t^{-1}\theta(t)\, \overline{x_+(t)} |r(t)|^2 \right) \text{ e } P_- \left\{ \overline{r(t)} P_+ \left[ (r\psi_-)(t) \right] \right\}. \quad (3.77)$$

**Proposição 3.11**

$$P_- \left( \overline{r(t)} g_+(t) \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} r_{jl} \left( -\frac{1}{\overline{\mu_j}} \right)^l \sum_{i=0}^{l-1} \frac{g_+^{(i)}\left( \frac{1}{\overline{\mu_j}} \right)}{i! \left( t - \frac{1}{\overline{\mu_j}} \right)^{l-i}}, \quad (3.78)$$

*para*

$$\overline{r(t)} = \frac{\prod_{i=1}^{m} (-\overline{\lambda_i})^{\beta_i}}{\prod_{j=1}^{n} (-\overline{\mu_j})^{\alpha_j}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} \frac{r_{jl}}{(1 - \overline{\mu_j}\; t)^l}. \quad (3.79)$$

**Demonstração.**

Decompomos $\overline{r(t)}$ em fracções elementares. Assim,

$$P_- \left( \overline{r(t)} g_+(t) \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} r_{jl} P_- \frac{g_+(t)}{(1 - \overline{\mu_j}\; t)^l}.$$

Analisemos em pormenor $P_- \dfrac{g_+(t)}{(1 - \overline{\mu_j}\; t)^l}$.

$$P_- \frac{g_+(t)}{(1 - \overline{\mu_j}\; t)^l} = \left( -\frac{1}{\overline{\mu_j}} \right)^l P_- \frac{g_+(t)}{(t - \frac{1}{\overline{\mu_j}})^l}$$

$$= \left( -\frac{1}{\overline{\mu_j}} \right)^l P_- \left[ \left( \underbrace{\frac{g_+(t) - g_+\left( \frac{1}{\overline{\mu_j}} \right)}{t - \frac{1}{\overline{\mu_j}}}}_{=y_+(t)} + \underbrace{\frac{g_+\left( \frac{1}{\overline{\mu_j}} \right)}{t - \frac{1}{\overline{\mu_j}}}}_{(-)} \right) \underbrace{\frac{1}{(t - \frac{1}{\overline{\mu_j}})^{l-1}}}_{(-)} \right]$$

$$= \left(-\frac{1}{\mu_j}\right)^l \left\{ \frac{g_+(\frac{1}{\mu_j})}{(t-\frac{1}{\mu_j})^l} + P_- \left[ \left[ \left( \underbrace{\frac{y_+(t) - y_+\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{t-\frac{1}{\mu_j}}}_{=z_+(t)} + \underbrace{\frac{y_+\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{t-\frac{1}{\mu_j}}}_{(-)} \right) \underbrace{\frac{1}{(t-\frac{1}{\mu_j})^{l-2}}}_{(-)} \right] \right] \right\}$$

$$= \left(-\frac{1}{\mu_j}\right)^l \sum_{i=0}^{l-1} \frac{g_+^{(i)}\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{i!\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right)^{l-i}}.$$

**Nota:** Numa vizinhança de $\frac{1}{\mu_j}$ temos que

$$g_+(t) = g_+\left(\frac{1}{\mu_j}\right) + g_+'\left(\frac{1}{\mu_j}\right)\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right) + \frac{g_+''\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{2!}\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right)^2 + \cdots .$$

Assim,

$$y_(t) = g_+'\left(\frac{1}{\mu_j}\right) + \frac{g_+''\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{2!}\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right) + \cdots$$

e

$$y_+\left(\frac{1}{\mu_j}\right) = g_+'\left(\frac{1}{\mu_j}\right).$$

Da mesma forma,

$$z_+(t) = \frac{g_+''\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{2!} + \frac{g_+'''\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{3!}\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right) + \cdots$$

e

$$z_+\left(\frac{1}{\mu_j}\right) = \frac{g_+''\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{2!}.$$

Seguindo este raciocínio obtemos (3.78) ■

**Proposição 3.12** *Se* $k_0 \geq 0$*,*

$$P_-\left(t^{-1}\theta(t)\,\overline{x_+(t)}|r(t)|^2\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} s_{jl} \left(-\frac{1}{\mu_j}\right)^{l} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{h_+^{(i)}\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{i!\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right)^{l-i}} + \sum_{l=1}^{k_0+1} d_l \sum_{i=0}^{l-1} \frac{h_+^{(i)}(0)}{i!} t^{i-l} = K_5 x_+(t), \tag{3.80}$$

*onde* $h_+(t) = t^{-1}\theta(t)\,\overline{x_+(t)}$ *e as constantes* $s_{jl}$ *e* $d_l$ *resultam da decomposição de* $|r(t)|^2$ *em fracções elementares (onde escolhemos, por motivos óbvios, somente as fracções com pólos em* $\mathbb{T}_+$*).*

*Se* $k_0 \leq -1$*,*

$$P_-\left(t^{-1}\theta(t)\,\overline{x_+(t)}|r(t)|^2\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} s^*_{jl} \left(-\frac{1}{\mu_j}\right)^{l} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{h_+^{(i)}\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{i!\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right)^{l-i}} = K_5 x_+(t). \tag{3.81}$$

**Demonstração.**

Seja $k_0 \geq 0$. Segundo a demonstração de (3.78) temos

$$P_-\left(t^{-1}\theta(t)\,\overline{x_+(t)}|r(t)|^2\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\alpha_j} s_{jl} \left(-\frac{1}{\mu_j}\right)^{l} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{h_+^{(i)}\left(\frac{1}{\mu_j}\right)}{i!\left(t-\frac{1}{\mu_j}\right)^{l-i}} + \sum_{l=1}^{k_0+1} d_l P_- \frac{h_+(t)}{t^l}.$$

Falta simplificar $P_- \dfrac{h_+(t)}{t^l}$. Como

$$h_+(t) = h_+(0) + h'_+(0)\,t + \frac{h''_+(0)}{2!}\,t^2 + \frac{h'''_+(0)}{3!}\,t^3 + \cdots + \frac{h_+^{(l)}(0)}{l!}\,t^l + \cdots$$

temos que

$$\frac{h_+(t)}{t^l} = h_+(0)\,t^{-l} + h'_+(0)\,t^{1-l} + \frac{h''_+(0)}{2!}\,t^{2-l} + \cdots + \frac{h_+^{(l-1)}(0)}{(l-1)!}\,t^{-1} + \frac{h_+^{(l)}(0)}{l!} + \frac{h_+^{(l+1)}(0)}{(l+1)!}\,t + \cdots$$

vindo

$$P_- \frac{h_+(t)}{t^l} = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{h_+^{(i)}(0)}{i!} t^{i-l}.$$

De forma análoga se demonstra para $k_0 \leq -1$ ■

**Proposição 3.13** *Se* $k_0 \geq 0$,

$$P_-\left\{\overline{r(t)}P_+\left[(r\psi_-)(t)\right]\right\}$$

$$= P_-\left\{\overline{r(t)}\left[\sum_{l=1}^{k_0+1} f_l \sum_{i=1}^{l} E_i\, t^{l-i} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j} g_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}\right]\right\} = K_6\psi_-(t). \tag{3.82}$$

*Se* $k_0 \leq -1$,

$$P_-\left\{\overline{r(t)}P_+\left[(r\psi_-)(t)\right]\right\} = P_-\left\{\overline{r(t)}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j} g^*_{jl} \sum_{i=1}^{l} \frac{F_{ij}}{(t-\mu_j)^{l-i+1}}\right]\right\} = K_6\psi_-(t). \tag{3.83}$$

Temos somente funções racionais. Assim, temos simplesmente de decompo-las em fracções elementares e escolher as fracções com pólos em $\mathbb{T}_+$.

Assim, obtemos a função $\psi_-(t)$ através das constantes que aparecem em $T_1 x_+(t)$ e $T_2\psi_-(t)$. Através das relações entre a função $\varphi_+(t)$ e $t=0$ (ver (3.49)) e das relações entre a função $\psi_-(t)$ e $t=\mu_j$ (ver (3.51)), podemos obter um sistema linear com $\dfrac{p}{3}$ equações e $p$ constantes.

Sejam $z_{i,+}$, $i=\overline{1,s_+}$, os zeros da função $\gamma + |r(t)|^2$ situados em $\mathbb{T}_+ \cup \mathbb{T}$, com multiplicidade $q_{i,+}$. Sejam $z_{i,-}$, $i=\overline{1,s_-}$, os zeros da função $\gamma + |r(t)|^2$ situados em $\mathbb{T}_-$, com multiplicidade $q_{i,-}$. Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{s_+} q_{i,+} + \sum_{i=1}^{s_-} q_{i,-} = \frac{2p}{3}.$$

Considerando as funções

$$f_3(t) = \frac{1}{\gamma}\left[P_-\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right) - K_5 x_+(t) - K_6\psi_-(t)\right] \tag{3.84}$$

e

$$f_4(t) = \overline{f_3(t)}, \tag{3.85}$$

obtemos o seguinte sistema linear de $p$ equações e $p$ incógnitas que nos permite determinar as constantes $A_i$, $B_{ij}$, $C_{ij}$, $D_i$, $E_i$ e $F_{ij}$,

$$\begin{cases} f_1^{(j)}(z_{i,+}) = 0, \ i = \overline{1, s_+}, \ j = \overline{0, q_{i,+} - 1} \\ \\ f_2^{(j)}(z_{i,-}) = 0, \ i = \overline{1, s_-}, \ j = \overline{0, q_{i,-} - 1} \\ \\ \dfrac{f_3^{(i-1)}(\mu_j)}{(i-1)!} = F_{ij}, \ i = \overline{1, \alpha_j}, \ j = \overline{1, n} \\ \\ \dfrac{\overline{f_4^{(i)}(0)}}{i!} = E_i, \ i = \overline{1, k_0 + 1} \ \ (se\ k_0 \geq 0) \end{cases} . \tag{3.86}$$

Enunciemos agora um algoritmo que nos permite resolver uma equação solúvel do tipo (3.1).

**Algoritmo para resolução da equação** $(N_+(b) + \gamma I)\omega_+(t) = g_+(t)$**.**

**Passo 1:** *Cálculo de* $k_0$*.*

**Passo 1.1:** Representar $r(t)$ na forma (3.11). Ir para o Passo 1.2.

**Passo 1.2:** Determinar $k_0$ através de (3.23). Ir para o Passo 1.3.

**Passo 1.3:** Se $k_0 \geq 0$, então ir para o Passo 2. Se $k_0 = -1$, então ir para o Passo 3. Se $k_0 \leq -2$, então ir para o Passo 4.

**Passo 2:** *O operador* $T_1$*.*

**Passo 2.1:** Decompor $\dfrac{|r(t)|^2}{t}$ numa soma de fracções elementares (ver (3.24)). Ir para o Passo 2.2.

**Passo 2.2:** Representar $T_1 x_+(t)$ através de (3.36), (3.37) e (3.38). Ir para o Passo 5.

**Passo 3:** *O operador* $T_1$*.*

**Passo 3.1:** Decompor $\dfrac{|r(t)|^2}{t}$ numa soma de fracções elementares (ver (3.25)). Ir para o Passo 3.2.

**Passo 3.2:** Representar $T_1 x_+(t)$ através de (3.36), (3.39) e (3.40). Ir para o Passo 6.

**Passo 4:** *O operador $T_1$.*

**Passo 4.1:** Decompor $\dfrac{|r(t)|^2}{t}$ numa soma de fracções elementares (ver (3.26)). Ir para o Passo 4.2.

**Passo 4.2:** Representar $T_1 x_+(t)$ através de (3.36), (3.41) e (3.42). Ir para o Passo 7.

**Passo 5:** *O operador $T_2$.*

**Passo 5.1:** Decompor $r(t)$ numa soma de fracções elementares (ver (3.44)). Ir para o Passo 5.2.

**Passo 5.2:** Representar $T_2 \psi_-(t)$ através de (3.64), (3.65) e (3.66). Ir para o Passo 8.

**Passo 6:** *O operador $T_2$.*

**Passo 6.1:** Decompor $r(t)$ numa soma de fracções elementares (ver (3.44)). Ir para o Passo 6.2.

**Passo 6.2:** Representar $T_2 \psi_-(t)$ através de (3.64), (3.67) e (3.68). Ir para o Passo 8.

**Passo 7:** *O operador $T_2$.*

**Passo 7.1:** Decompor $r(t)$ numa soma de fracções elementares (ver (3.45)). Ir para o Passo 7.2.

**Passo 7.2:** Representar $T_2 \psi_-(t)$ através de (3.64), (3.67) e (3.68). Ir para o Passo 8.

**Passo 8:** *Cálculo de* $P_-\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right)$.

**Passo 8.1:** Decompor $\overline{r(t)}$ numa soma de fracções elementares (ver (3.79)). Ir para o Passo 8.2.

**Passo 8.2:** Escrever $P_-\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right)$ através de (3.78). Ir para o Passo 9.

**Passo 9:** *Representação da função* $t^{-1}\theta(t)\overline{x_+(t)}$ *através das constantes* $A_i$*,* $B_{ij}$*,* $C_{ij}$*,* $D_i$*,* $E_i$ *e* $F_{ij}$*.*

**Passo 9.1:** Escrever $t^{-1}\theta(t)\overline{x_+(t)}$ através de (3.70). Ir para o Passo 9.2.

**Passo 9.2:** Se $k_0 \geq 0$, então ir para o Passo 10. Se $k_0 \leq -1$, então ir para o Passo 11.

**Passo 10:** *Os operadores* $K_5$ *e* $K_6$*.*

**Passo 10.1:** Decompor $|r(t)|^2$ numa soma de fracções elementares. Ir para o Passo 10.2.

**Passo 10.2:** Escrever $K_5x_+(t)$ através de (3.80). Ir para o Passo 10.3.

**Passo 10.3:** Decompor $r(t)$ em somas de fracções elementares. Ir para o Passo 10.4.

**Passo 10.4:** Escrever $K_6\psi_-(t)$ através de (3.82). Ir para o Passo 12.

**Passo 11:** *Os operadores* $K_5$ *e* $K_6$*.*

**Passo 11.1:** Decompor $|r(t)|^2$ numa soma de fracções elementares. Ir para o Passo 11.2.

**Passo 11.2:** Escrever $K_5x_+(t)$ através de (3.81). Ir para o Passo 11.3.

**Passo 11.3:** Decompor $r(t)$ em somas de fracções elementares. Ir para o Passo 11.4.

**Passo 11.4:** Escrever $K_6\psi_-(t)$ através de (3.83). Ir para o Passo 12.

**Passo 12:** *Resolução do sistema* (*3.86*).

**Passo 12.1:** Escrever $f_1(t)$ através de (3.71). Ir para o Passo 12.2.

**Passo 12.2:** Escrever $f_2(t)$ através de (3.73). Ir para o Passo 12.3.

**Passo 12.3:** Escrever $f_3(t)$ através de (3.84). Ir para o Passo 12.4.

**Passo 12.4:** Escrever $f_4(t)$ através de (3.85). Ir para o Passo 12.5.

**Passo 12.5:** Determinar os zeros de $\gamma + |r(t)|^2$. Ir para o Passo 12.6.

**Passo 12.6:** Resolver o sistema (3.86). Ir para o Passo 12.7.

**Passo 12.7:** Se $k_0 \geq 0$, então ir para o Passo 13. Se $k_0 \leq -1$, então ir para o Passo 14.

**Passo 13:** *A*($s$) *solução*($\tilde{o}es$) $\omega_+(t)$.

**Passo 13.1:** Reescrever $P_+\left[(r\psi_-)(t)\right]$ através de (3.52). Ir para o Passo 13.2.

**Passo 13.2:** Escrever $\omega_+(t)$ através de (3.21).

**Passo 14:** *A*($s$) *solução*($\tilde{o}es$) $\omega_+(t)$.

**Passo 14.1:** Reescrever $P_+\left[(r\psi_-)(t)\right]$ através de (3.53). Ir para o Passo 14.2.

**Passo 14.2:** Escrever $\omega_+(t)$ através de (3.21).

**Observação 3.1** *Devemos referir que nem sempre, dependendo de $g_+(t)$, é possível simplificar $P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right)$. No entanto, para as equações da forma (3.1) que necessitamos de resolver para obtermos uma factorização generalizada explícita de uma classe de funções matriciais que será estudada no Capítulo 4, consegue-se sempre simplificar $P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right)$.*

Vamos analisar mais pormenorizadamente $P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right)$ em algumas situações particulares.

#### 3.2.2.1 Caso $-\gamma \in \rho(N_+(b))$

Sabemos que se $-\gamma \in \rho(N_+(b))$ a equação (3.1) é sempre unicamente solúvel e

$$\omega_+(t) = (N_+(b) + \gamma I)^{-1} g_+(t).$$

Assim, o sistema obtido é possível e determinado (unicamente solúvel).

Vamos, em particular, analisar duas situações que nos permitirão construir uma factorização generalizada canónica de uma classe de funções matriciais que estudaremos no Capítulo 4.

1. $g_+(t) \equiv 1$

   A equação não homogénea a resolver tem a forma

   $$(N_+(b) + \gamma I)u_+(t) = 1.$$

   ***Nota:*** Neste caso temos que

   $$P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right) = \overline{r(0)}\left(1 - \overline{\theta(0)}\theta(t)\right). \tag{3.87}$$

2. $g_+(t) = b(t) = r(t)\theta(t) = \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{\beta_i}}{\prod_{j=1}^{n}(t-\mu_j)^{\alpha_j}}\,\theta(t)$ (ver (3.11))

   A equação não homogénea a resolver tem a forma

   $$(N_+(b) + \gamma I)v_+(t) = b(t).$$

   ***Nota:*** Neste caso temos que

   - Se $k_0 \geq 0$,

     $$P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j}\frac{s_{jl}}{(1-\overline{\mu_j}\;t)^l}\left[\theta(t)-\sum_{i=1}^{l}G_{ij}\left(t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^{i-1}\right]+\sum_{l=1}^{k_0+1}\frac{z_l}{t^l}\left(\theta(t)-\sum_{i=0}^{l-1}H_it^i\right), \tag{3.88}$$

onde

$$G_{ij}=\frac{\theta^{(i-1)}\left(\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)}{(i-1)!} \quad \text{e} \quad H_i=\frac{\theta^{(i)}(0)}{i!}.$$

Com um raciocínio análogo obtemos

- Se $k_0 \leq -1$,

$$P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j}\frac{s^*_{jl}}{(1-\overline{\mu_j}\;t)^l}\left[\theta(t)-\sum_{i=1}^{l}G_{ij}\left(t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^{i-1}\right]. \tag{3.89}$$

**Demonstração.**

Seja $k_0 \geq 0$. Temos

$$P_\theta\left(\overline{r(t)}b(t)\right)=(P_+-\theta(t)P_+\overline{\theta(t)}I)\left(|r(t)|^2\theta(t)\right)$$

$$=P_+\left(|r(t)|^2\theta(t)\right)-\theta(t)P_+|r(t)|^2$$

$$=P_+\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j}\frac{s_{jl}}{(1-\overline{\mu_j}\;t)^l}+\sum_{l=1}^{k_0+1}\frac{z_l}{t^l}\right)\theta(t)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{\alpha_j}s_{jl}P_+\frac{\theta(t)}{(1-\overline{\mu_j}\;t)^l}+\sum_{l=1}^{k_0+1}z_lP_+\frac{\theta(t)}{t^l}.$$

Mas,

$$P_+\frac{\theta(t)}{(1-\overline{\mu_j}\;t)^l}=\left(-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^lP_+\frac{\theta(t)}{\left(t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^l} \tag{3.90}$$

$$=\frac{1}{(1-\overline{\mu_j}\;t)^l}\left[\theta(t)-\sum_{i=1}^{l}\frac{\theta^{(i-1)}\left(\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)}{(i-1)!}\left(t-\frac{1}{\overline{\mu_j}}\right)^{i-1}\right],\ l\geq 1,$$

(ver demonstração de (3.33)).

Temos também que

$$P_+\frac{\theta(t)}{t^l} = \frac{1}{t^l}\left(\theta(t) - \sum_{i=0}^{l-1}\frac{\theta^{(i)}(0)}{i!}t^i\right), \ l \geq 1, \tag{3.91}$$

(a demonstração é análoga à de (3.35)).

De forma similar se demonstra para $k_0 \leq -1$ ■

#### 3.2.2.2 Caso $-\gamma \in \sigma(N_+(b))$

Quando $-\gamma \in \sigma(N_+(b))$, a equação (3.1) pode ser ou não solúvel. Assim, neste caso, o sistema obtido pode ser impossível ou possível indeterminado.

Vamos analisar, em particular, algumas situações distintas. A primeira dar-nos-á o núcleo do operador $N_+(b)+\gamma I$ e duas das outras (ver (3.8), (3.9) e (3.10)) dar-nos-ão uma factorização generalizada não canónica de uma classe de funções matriciais que analisaremos no Capítulo 4.

1. $g_+(t) \equiv 0$

   A equação homogénea dá-nos o $\mathrm{Ker}(N_+(b)+\gamma I)$, que denotaremos por $\kappa$. Como $-\gamma \in \sigma(N_+(b))$, iremos provar, no Capítulo 4, que

   $$0 < \kappa < \infty.$$

2. $g_+(t) \equiv \gamma$

   A equação não homogénea a resolver tem a forma

   $$(N_+(b) + \gamma I)x_+(t) = \gamma, \tag{3.92}$$

   e o sistema (se solúvel) dá-nos as soluções $x_+(t)$ (ver (3.87)).

   ***Nota:*** Neste caso temos que

   $$P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right) = \gamma\overline{r(0)}\left(1 - \overline{\theta(0)}\theta(t)\right).$$

3. $g_+(t) = \gamma b(t) = \gamma r(t)\theta(t) = \gamma \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{\beta_i}}{\prod_{j=1}^{n}(t-\mu_j)^{\alpha_j}}\, \theta(t)$ (ver (3.11))

   A equação não homogénea a resolver tem a forma
   $$(N_+(b) + \gamma I)y_+(t) = \gamma b(t),$$
   e o sistema (se solúvel) dá-nos as soluções $y_+(t)$ (ver (3.88) e (3.89)).

4. $g_+(t) = \gamma r_{1,\kappa}(t)$, onde $r_{1,\kappa}(t)$ é um polinómio de grau $\kappa$ da forma
   $$r_{1,\kappa}(t) = t^\kappa + s_{1,\kappa-1}(t).$$
   A equação não homogénea a resolver tem a forma
   $$(N_+(b) + \gamma I)x_+(t) = \gamma r_{1,\kappa}(t),$$
   e o sistema (se solúvel) dá-nos as soluções $x_+(t)$.

   ***Nota:*** Neste caso temos que
   $$P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right) = \gamma\left(P_+ - \theta(t)P_+\overline{\theta(t)}I\right)\left(\overline{r(t)}r_{1,\kappa}(t)\right),$$
   onde $r(t) = \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{\beta_i}}{\prod_{j=1}^{n}(t-\mu_j)^{\alpha_j}}$ (ver (3.11)). Basta decompor em fracções elementares a função $\overline{r(t)}r_{1,\kappa}(t)$ e escolher os factores sem pólos em $\mathbb{T}_+$. Ficamos imediatamente com $P_+\left(\overline{r(t)}r_{1,\kappa}(t)\right)$. Para simplificar a expressão $P_+\left(\overline{\theta(t)r(t)}r_{1,\kappa}(t)\right)$, só precisamos de (3.61).

5. $g_+(t) = \gamma b(t)r_{2,\kappa}(t) = \gamma r(t)\theta(t)r_{2,\kappa}(t)$, onde $r_{2,\kappa}(t)$ é um polinómio de grau $\kappa$ da forma
   $$r_{2,\kappa}(t) = t^\kappa + s_{2,\kappa-1}(t).$$
   A equação não homogénea a resolver tem a forma
   $$(N_+(b) + \gamma I)y_+(t) = \gamma b(t)r_{2,\kappa}(t),$$

e o sistema (se solúvel) dá-nos as soluções $y_+(t)$.

***Nota:*** Neste caso temos que

$$P_\theta\left(\overline{r(t)}g_+(t)\right) = \gamma\left[P_+\left(|r(t)|^2 r_{2,\kappa}(t)\theta(t)\right) - \theta(t)P_+\left(|r(t)|^2 r_{2,\kappa}(t)\right)\right],$$

onde $r(t) = \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{\beta_i}}{\prod_{j=1}^{n}(t-\mu_j)^{\alpha_j}}$ (ver (3.11)).

Precisamos de decompor em fracções elementares a função $|r(t)|^2 r_{2,\kappa}(t)$ e escolher os factores sem pólos em $\mathbb{T}_+$. Ficamos imediatamente com $P_+\left(|r(t)|^2 r_{2,\kappa}(t)\right)$. Para simplificar $P_+\left(|r(t)|^2 r_{2,\kappa}(t)\theta(t)\right)$ ainda precisamos de (3.90) e de (3.91).

## 3.3 Exemplo

Vamos agora apresentar um exemplo da aplicação do algoritmo.

### 3.3.1 $b(t) = \dfrac{1}{t-\mu}\,\theta(t)$

Consideremos o caso

$$b(t) = \frac{1}{t-\mu}\,\theta(t),$$

onde $|\mu| > 1$ e $\theta(t)$ é uma função interna.

Através de (3.11) e (3.23) temos que $k_0 = -2$ e sabemos que temos 3 constantes para determinar: $B_{11} = x_-(\mu)$, $C_{11} = (\theta\, x_-)\left(\frac{1}{\mu}\right)$ e $F_{11} = \psi_-(\mu)$.

Utilizando as fórmulas (3.36), (3.41) e (3.42), obtemos

$$T_1 x_+(t) = \frac{B(t-\mu)C_{11} + \theta(t)\left[A(1-\overline{\mu}\,t)B_{11} - (A + Bt - B\mu - A\overline{\mu}\,t)\overline{x_+(t)}\right]}{(t-\mu)(1-\overline{\mu}\,t)},$$

onde $A = \dfrac{1}{1-|\mu|^2}$ e $B = \dfrac{\overline{\mu}}{1-|\mu|^2}$.

Utilizando as fórmulas (3.64), (3.67) e (3.68), obtemos

$$T_2\psi_-(t) = \frac{\mu A[-1 + y_-(\mu)\theta(t)]F_{11}}{t-\mu}\ .$$

A função $\gamma + |r(t)|^2$ tem um zero de multiplicidade dois ou dois zeros distintos. Temos de analisar se o(s) zero(s) pertence(m) a $\mathbb{T}_+$, a $\mathbb{T}_-$ ou a $\mathbb{T}$. Assim, dependendo dos valores de $\mu$ e de $\gamma$, temos diferentes sistemas a resolver.

Vamos considerar, para obtermos resultados numa forma simples, valores concretos para as constantes $\mu$ e $\gamma$. Vejamos, por exemplo, o caso quando $\mu = 2$, $\gamma = -\dfrac{1}{9}$ e $\theta(t)$ é diferenciável numa vizinhança de $t = -1$ e tal que $\theta'(-1) \neq 0$. Temos que $-\gamma \in \rho(N_+(b))$ e a equação

$$(N_+(b) + \gamma I)\omega_+(t) = g_+(t)$$

é unicamente solúvel. Analisando, em particular, as equações

$$(N_+(b) + \gamma I)u_+(t) = 1$$

e

$$(N_+(b) + \gamma I)v_+(t) = b(t),$$

podemos aplicar o algoritmo e obter as soluções

$$u_+(t) = \frac{27\,\overline{\theta(0)}}{4}\frac{j_+(t)}{t-2} - 9\frac{3(-1+2t)\theta(t) + (t-2)^2[\theta(-1) + (t+1)\theta'(-1)]}{(t-2)(t+1)^2\theta'(-1)}$$

e

$$v_+(t) = \frac{3}{2}\frac{j_+(t)}{t-2}\ ,$$

onde

$$j_+(t) = \frac{(t-2)^2\theta(-1)^2 - 3(-1+2t)\theta(t)[(t+1)\theta'(-1) - \theta(-1)]}{(t+1)^2\theta'(-1)}\ .$$

# Capítulo 4

# Factorização de funções matriciais

O Capítulo 4 é dedicado à factorização de funções matriciais do tipo

$$A_\gamma(b) = \begin{pmatrix} e & b \\ b^* & b^*b + \gamma e \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

onde $\gamma$ é uma constante complexa arbitrária, $e$ representa a função matricial identidade, $b$ é uma função matricial pertencente a $[L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ e $b^*$ é a adjunta hermiteana de $b$.

Começamos por indicar algumas propriedades da função matricial $A_\gamma(b)$.

Na secção seguinte, constatando que existem fortes ligações entre uma factorização de $A_\gamma(b)$ e os operadores $N_\pm(b)$, obtemos o operador resolvente de $N_-(b)$ ($N_+(b)$) através de uma factorização generalizada canónica esquerda (direita) de funções matriciais do tipo (4.1).

Na secção 4.3 estudamos a função matricial $A_\gamma(b)$ quando esta admite uma factorização generalizada canónica esquerda, $A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-$ (podendo um raciocínio análogo ser feito considerando uma factorização generalizada canónica direita). Analisando o caso quando $b \in [L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ mostramos que $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda se e só se $-\gamma \in \rho(N_+(b))$. Em particular, temos que é possível obter uma factorização generalizada canónica esquerda através das soluções das equações não homogéneas

$$(N_+(b) + \gamma I)\, u_+ = e \quad \text{e} \quad (N_+(b) + \gamma I)\, v_+ = P_+ b.$$

Caso seja pretendida uma factorização generalizada canónica direita basta considerarmos equações do mesmo tipo onde substituímos $b$ por $b^*$. Notamos que se considerarmos $b = b_- + b_+$, onde $b_+$, $b_-^* \in [H_\infty]_{n,n}$, temos que a construção de uma factorização generalizada esquerda (direita) de $A_\gamma(b)$ não depende do elemento $b_-$ $(b_+)$.

A secção 4.4 é dedicada ao estudo do problema de factorização de funções matriciais $2 \times 2$, da forma (4.1), admitindo uma factorização generalizada não canónica $A_\gamma(b) = A_\gamma^+ \Lambda A_\gamma^-$ (isto é, quando $-\gamma \in \sigma(N_+(b))$). Estamos perante uma função matricial hermiteana, os índices parciais são simétricos e podemos relacioná-los com a dimensão do núcleo dos operadores $N_+(b) + \gamma I$ e $N_-(b) + \gamma I$. Construímos então um método que nos permite determinar duas equações não homogéneas do tipo (3.1) e, com as soluções destas, encontrar uma factorização generalizada não canónica de (4.1).

Na secção 4.5, onde retratamos o caso $b \in H_{\infty,r}$, elaboramos um algoritmo para a construção de uma factorização generalizada explícita de funções matriciais da forma (4.1).

Terminamos com a secção 4.6, onde são apresentados alguns exemplos com o objectivo de ilustrar e clarificar os resultados descritos nas secções anteriores.

## 4.1 A classe de funções matriciais $A_\gamma(b)$

Vejamos nesta secção algumas propriedades da função matricial $A_\gamma(b)$.

Podemos facilmente constatar que a função matricial $A_\gamma(b)$ pode ser expressa na seguinte forma

$$A_\gamma(b) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ b^* & \gamma e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & b \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

da qual segue que

$$\det A_\gamma(b) = \gamma^n.$$

**Lema 4.1** *Seja $b \in [L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ e $\gamma$ uma constante complexa. A função matricial*

$$A_\gamma(b) = \begin{pmatrix} e & b \\ b^* & b^*b + \gamma e \end{pmatrix}$$

*é invertível se e só se $\gamma \neq 0$. Além disso, se $\gamma \neq 0$ temos que*

$$A_\gamma^{-1}(b) = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma e + bb^* & -b \\ -b^* & e \end{pmatrix}.$$

De agora em diante, assumiremos que $\gamma \neq 0$.

## 4.2 Resolventes de $N_-(b)$ e $N_+(b)$ através da factorização de $A_\gamma(b)$

Temos como finalidade a determinação de um método para o cálculo do resolvente do operador $N_-(b)$ ($N_+(b)$) através de uma factorização canónica esquerda (direita) da função matricial $A_\gamma(b)$ ($A_\gamma(b^*)$).

Considerando a equação

$$\gamma\varphi + N_-(b)\varphi = f, \tag{4.2}$$

onde

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-, \quad \varphi_\pm \in [L_2^\pm(\mathbb{T})]_{n,n}, \quad f \in [L_2(\mathbb{T})]_{n,n},$$

obtemos imediatamente que

$$\varphi_+ = \gamma^{-1} P_+ f,$$

se aplicarmos $P_+$ à equação (4.2). Falta resolver a equação

$$\gamma\varphi_- + N_-(b)\varphi_- = f_-, \tag{4.3}$$

onde $f_- = P_- f$. Escrevendo

$$b\varphi_- = \omega_+ - \omega_-,$$

segue que

$$\gamma\varphi_- + b^*\omega_+ - \chi_+ = f_-,$$

onde $\omega_\pm \in [L_2^\pm(\mathbb{T})]_{n,n}$ e $\chi_+ \in [L_2^+(\mathbb{T})]_{n,n}$.

Temos que

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ b^* & -e \end{pmatrix} \Phi_+ = \begin{pmatrix} e & b \\ 0 & -\gamma e \end{pmatrix} \Phi_- + \Psi_-, \tag{4.4}$$

onde

$$\Phi_+ = \begin{pmatrix} \omega_+ \\ \chi_+ \end{pmatrix}, \quad \Phi_- = \begin{pmatrix} \omega_- \\ \varphi_- \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ f_- \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$\begin{cases} \omega_+ = \omega_- + b\varphi_- \\ b^*\omega_+ - \chi_+ = -\gamma\varphi_- + f_- \end{cases}.$$

De (4.4) segue o problema de contorno de Riemann

$$\Phi_+ = A_\gamma(b)\Phi_- - \Psi_-, \tag{4.5}$$

associado à função matricial $A_\gamma(b)$.

Podemos constatar que a equação (4.3) e o problema (4.5) são equivalentes. De facto,

$\diamond$ $\gamma\varphi_- + N_-(b)\varphi_- = f_- \iff \gamma\varphi_- + P_-[b^*P_+(\omega_+ - \omega_-)] = f_- \iff \gamma\varphi_- + P_-(b^*\omega_+) = f_- \iff \gamma\varphi_- + b^*\omega_+ - \chi_+ = f_-$, com $\chi_+ = P_+(b^*\omega_+)$

$\diamond$ $\gamma\varphi_- + P_-[b^*P_+(b\varphi_-)] = \gamma\varphi_- + P_-(b^*\omega_+) = f_- - b^*\omega_+ + \chi_+ + P_-(b^*\omega_+)$
aplicando $P_-$ obtemos:
$f_- - P_+(b^*\omega_+) + P_-(b^*\omega_+) = f_-$

Como o problema (4.5) é unicamente solúvel se e só se $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda, podemos concluir que a equação (4.3) é unicamente solúvel se e só se $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda.

Vamos supor que a matriz $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-.$$

Se considerarmos os operadores

$$\hat{\pi}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \quad \text{e} \quad \check{\pi}x = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

o problema de contorno de Riemann referido mostra que

$$\varphi_- = \hat{\pi}\ (A_\gamma^-)^{-1} P_- (A_\gamma^+)^{-1}\ \breve{\pi}\ f_-.$$

Usando um procedimento similar para o operador $N_+(b)$ e denotando o resolvente de $N_\pm(b)$ por $R(N_\pm(b), -\gamma I) = (N_\pm(b) + \gamma I)^{-1}$ e o conjunto resolvente de $N_\pm$ por $\rho(N_\pm)$, obtemos o resultado principal desta secção.

**Teorema 4.1**

(i) *Se* $A_\gamma(b)$ *admite uma factorização generalizada canónica* $A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-$, *então* $-\gamma \in \rho(N_-(b))$. *Nesse caso,*

$$R(N_-(b), -\gamma I) = \hat{\pi}\ (A_\gamma^-)^{-1} P_- (A_\gamma^+)^{-1}\ \breve{\pi}\ P_- + \tfrac{1}{\gamma}\ P_+.$$

(ii) *Se* $A_\gamma(b^*)$ *admite uma factorização generalizada canónica* $A_\gamma(b^*) = A_\gamma^- A_\gamma^+$, *então* $-\gamma \in \rho(N_+(b))$. *Nesse caso,*

$$R(N_+(b), -\gamma I) = \hat{\pi}\ (A_\gamma^+)^{-1} P_+ (A_\gamma^-)^{-1}\ \breve{\pi}\ P_+ + \tfrac{1}{\gamma}\ P_-.$$

**Demonstração.** (i) Supondo que $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda $A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-$, podemos obter, usando (4.3), (4.4) e (4.6):

$$\varphi_- = \hat{\pi}(A_\gamma^-)^{-1} P_- (A_\gamma^+)^{-1} \breve{\pi} f_-,$$

pois

$$\hat{\pi}(A_\gamma^-)^{-1} P_- (A_\gamma^+)^{-1} \breve{\pi} f_- = \hat{\pi}(A_\gamma^-)^{-1} P_- (A_\gamma^+)^{-1} \Psi_-$$

$$= \hat{\pi}(A_\gamma^-)^{-1} P_- (A_\gamma^+)^{-1} (A_\gamma(b)\Phi_- - \Phi_+) = \hat{\pi}(A_\gamma^-)^{-1} P_- (A_\gamma^+)^{-1} A_\gamma(b)\Phi_-$$

$$= \hat{\pi}(A_\gamma^-)^{-1} A_\gamma^- \Phi_- = \hat{\pi}\Phi_- = \varphi_-.$$

E, utilizando (4.2), obtemos

$$(N_-(b) + \gamma I)\hat{\pi}(A_\gamma^-)^{-1} P_- (A_\gamma^+)^{-1} \breve{\pi} f_- = N_-(b) + \gamma\varphi_- = f_-$$

e

$$(N_-(b) + \gamma I)\frac{1}{\gamma} f_+ = f_+.$$

Finalmente, tem-se que $-\gamma \in \rho(N_-(b))$ e

$$R(N_-(b), -\gamma I) = (N_-(b) + \gamma I)^{-1} = \hat{\pi}\ (A_\gamma^-)^{-1} P_- (A_\gamma^+)^{-1}\ \check{\pi}\ P_- + \tfrac{1}{\gamma}\ P_+.$$

Usando um procedimento similar para o operador $N_+(b)$ demonstramos (ii) ■

Assim, podemos determinar os resolventes $R(N_-(b), -\gamma I)$ e $R(N_+(b), -\gamma I)$ através de uma factorização generalizada canónica da função matricial $A_\gamma(b)$.

## 4.3 Factorização de $A_\gamma(b)$. Caso canónico

Nesta secção iremos ver como determinar uma factorização generalizada canónica da função matricial $A_\gamma(b)$ utilizando o operador integral singular $N_+(b)$.

### 4.3.1 O caso $b \in [L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$

Vamos estudar o problema de contorno de Riemann

$$\begin{cases} \Phi_+ = A_\gamma(b)(E + \Phi_-) \\ \Phi_-(\infty) = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

onde $b \in [L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ e $E = \mathrm{diag}(e, e)$. O objectivo inicial é determinar funções matriciais $\Phi_\pm \in [L_2^\pm(\mathbb{T})]_{2n,2n}$ satisfazendo as equações acima.

Sabemos que se $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-,$$

então o problema (4.7), onde $\Phi_+$ é uma função que admite prolongamento analítico na região interior de $\mathbb{T}$ e $\Phi_-$ é uma função que admite prolongamento analítico na região exterior de $\mathbb{T}$ tal que $\Phi_-(\infty) = 0$, tem solução e esta é única:

$$\Phi_+ = A_\gamma^+, \quad \Phi_- = (A_\gamma^-)^{-1} - E.$$

Além disso, podemos relacionar a existência de uma factorização generalizada canónica esquerda de $A_\gamma(b)$ com o facto de $-\gamma$ pertencer ou não ao conjunto resolvente do operador $N_+(b)$.

**Teorema 4.2** *A função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda em $L_2(\mathbb{T})$ se e só se $-\gamma \in \rho(N_+(b))$.*

**Demonstração.** É bem sabido que a função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda em $L_2(\mathbb{T})$

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-,$$

se e só se o operador integral singular

$$T = P_+ + A_\gamma(b)P_-$$

é um operador invertível em $[L_2(\mathbb{T})]_n$ (ver Teorema 2.17).

Consideremos o operador

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -P_-b^*P_- & I \end{pmatrix} T(I - P_+A_\gamma(b)P_-) \begin{pmatrix} I & -P_-bP_- \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N_-(b) + \gamma P_- + P_+ \end{pmatrix}.$$

Visto que

$$(N_-(b) + \gamma P_- + P_+)(\gamma P_+ + P_-) = N_-(b) + \gamma I,$$

obtemos que a função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-,$$

se e só se $-\gamma \in \rho(N_-(b))(= \rho(N_+(b)))$ ■

Vamos então assumir que $-\gamma$ pertence ao conjunto resolvente do operador $N_+(b)$. Escrevendo $\Phi_\pm$ como

$$\Phi_\pm = \begin{pmatrix} x_\pm & y_\pm \\ z_\pm & v_\pm \end{pmatrix},$$

obtemos de (4.7)

$$\begin{cases} x_+ = e + x_- + bz_- \\ y_+ = y_- + b + bv_- \\ z_+ = b^* x_+ + \gamma z_- \\ v_+ = b^* y_+ + \gamma e + \gamma v_- \end{cases}.$$

Aplicando o operador $P_+$ às duas primeiras equações e $P_-$ às duas últimas obtém-se este sistema:

$$\begin{cases} x_+ = e + P_+(bz_-) \\ y_+ = P_+ b + P_+(bv_-) \\ 0 = P_-(b^* x_+) + \gamma z_- \\ 0 = P_-(b^* y_+) + \gamma v_- \end{cases}.$$

Assim, as componentes das funções matriciais $\Phi_\pm$ podem ser representadas através do resolvente do operador $N_+(b)$:

$$\begin{cases} x_+ = \gamma R(N_+(b), -\gamma I) e \\ y_+ = \gamma R(N_+(b), -\gamma I) P_+ b \\ z_- = -P_- \left[ b^* R(N_+(b), -\gamma I) e \right] \\ v_- = -P_- \left[ b^* R(N_+(b), -\gamma I) P_+ b \right] \end{cases}.$$

O último sistema resulta de:

- $(N_+(b)+\gamma I)x_+ = P_+[bP_-(b^*x_+)]+\gamma x_+ = P_+[b(-\gamma z_-))+\gamma[e+P_+(bz_-)] = \gamma e$
- $(N_+(b) + \gamma I)y_+ = P_+[bP_-(b^*y_+)] + \gamma y_+ = P_+[b(-\gamma v_-)] + \gamma[P_+b + P_+(bv_-)] = \gamma P_+b$
- $z_- = -\frac{1}{\gamma}\, P_-(b^*x_+) = -\frac{1}{\gamma}\, P_-[b^*(\gamma R(N_+(b), -\gamma I)e)] = -P_-[b^*R(N_+(b), -\gamma I)e]$
- $v_- = -\frac{1}{\gamma}\, P_-(b^*y_+) = -\frac{1}{\gamma}\, P_-[b^*(\gamma R(N_+(b), -\gamma I)P_+b)] = -P_-[b^*R(N_+(b), -\gamma I)P_+b]$

Os restantes elementos de $\Phi_\pm$ podem-se exprimir através destes.

Obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 4.3** *Se $-\gamma \in \rho(N_+(b))$, então uma solução para o problema (4.7) pode ser representada na forma*

$$\Phi_+ = \gamma \begin{pmatrix} R(N_+(b), -\gamma I)e & R(N_+(b), -\gamma I)P_+b \\ P_+[b^*R(N_+(b), -\gamma I)e] & e + P_+[b^*R(N_+(b), -\gamma I)P_+b] \end{pmatrix}$$

*e*

$$\Phi_- = \begin{pmatrix} P_-\{bP_-[b^*R(N_+(b), -\gamma I)e]\} & -P_-b + P_-\{bP_-[b^*R(N_+(b), -\gamma I)P_+b]\} \\ -P_-[b^*R(N_+(b), -\gamma I)e] & -P_-[b^*R(N_+(b), -\gamma I)P_+b] \end{pmatrix}.$$

Podemos então concluir o seguinte resultado.

**Teorema 4.4** *A função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica*

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-,$$

*se e só se* $-\gamma \in \rho(N_+(b))$. *E, nesse caso,*

$$A_\gamma^+ = \gamma \begin{pmatrix} R(N_+(b), -\gamma I)e & R(N_+(b), -\gamma I)P_+b \\ P_+[b^* R(N_+(b), -\gamma I)e] & e + P_+[b^* R(N_+(b), -\gamma I)P_+b] \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

*e*

$$A_\gamma^- = \begin{pmatrix} e + P_-\{bP_-[b^* R(N_+(b), -\gamma I)e]\} & P_-\{bP_-[b^* R(N_+(b), -\gamma I)P_+b]\} - P_-b \\ -P_-[b^* R(N_+(b), -\gamma I)e] & e - P_-[b^* R(N_+(b), -\gamma I)P_+b] \end{pmatrix}^{-1}. \tag{4.9}$$

Obtemos uma factorização generalizada canónica de $A_\gamma(b)$ através do resolvente do operador $N_+(b)$.

Em particular, quando $n = 1$, temos que $-\gamma \in \rho(N_+(b))$ implica que $1, P_+b \in \operatorname{Im}(N_+(b) + \gamma I)$, i.e., as equações

$$(N_+(b) + \gamma I)u_+ = 1 \tag{4.10}$$

e

$$(N_+(b) + \gamma I)v_+ = P_+b \tag{4.11}$$

são solúveis e, caso $b \in H_{\infty,r}$, podem resolvidas através do algoritmo descrito no Capítulo 3. Temos que

$$u_+ = R(N_+(b), -\gamma I)1 \quad \text{e} \quad v_+ = R(N_+(b), -\gamma I)(P_+b). \tag{4.12}$$

Podemos reescrever a equação (4.10)

$$1 + P_-[bP_-(\overline{b}u_+)] = \gamma u_+ + bP_-(\overline{b}u_+),$$

e a equação (4.11)

$$P_-[bP_-(\overline{b}v_+)] = \gamma v_+ - P_+b + bP_-(\overline{b}v_+).$$

Usando (4.8) e (4.9), obtemos que

$$\det A_\gamma^+ = \gamma^2[u_+ - v_+P_-(\bar{b}v_+) + v_+P_-(\bar{b}u_+)] = \gamma \det(A_\gamma^-)^{-1}.$$

Visto que $A_\gamma^-(\infty)$ é a matriz identidade, temos que $\det A_\gamma^+ = \gamma$ e $\det A_\gamma^- = 1$, consequentemente,

$$A_\gamma^- = \begin{pmatrix} 1 - P_-(\bar{b}v_+) & P_-b - P_-[bP_-(\bar{b}v_+)] \\ P_-(\bar{b}u_+) & 1 + P_-[bP_-(\bar{b}u_+)] \end{pmatrix}.$$

Isto é, se $-\gamma \in \rho(N_+(b))$, então uma factorização generalizada de $A_\gamma(b)$ é canónica e pode ser determinada explicitamente através das soluções de duas equações não homogéneas.

Estamos agora em condições de analisar (ver secção 2.6) o caso (não analisado em [29]) quando a função matricial (2.21),

$$G(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ \overline{b(t)} & d(t) \end{pmatrix}$$

admite uma factorização generalizada esquerda e

$$\Delta(t) > 0, \quad \text{em q.t.p. em } \mathbb{T}.$$

Sabemos que a função $\Delta$ admite uma factorização generalizada em $L_2(\mathbb{T})$,

$$\Delta = |\Delta_+|^2,$$

onde $\Delta_+^{\pm 1} \in H_\infty$.

Assumindo que a função $d$ (um raciocínio análogo pode ser feito com a função $a$) preserva o sinal em q.t.p. em $\mathbb{T}$, e é invertível em $L_\infty(\mathbb{T})$, então pode ser representada na forma

$$d = \varepsilon|d_+|^2,$$

onde $d_+^{\pm 1} \in H_\infty$ e $\varepsilon$ representa o valor do sinal de $d$.

Introduzimos a função

$$\omega = \frac{\overline{b}\,\overline{d}_+^2}{\overline{\Delta}_+\, d}\,, \tag{4.13}$$

e associamos a $\omega$ a função matricial

$$A_1(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \overline{\omega} & |\omega|^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Seja

$$X_+ = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_+ d_+^{-1} \\ d_+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Como a função matricial $X_+$ pertence, juntamente com a sua inversa

$$X_+^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & d_+^{-1} \\ d_+ \Delta_+^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

à classe $[H_\infty]_{2,2}$, segue de

$$G = \varepsilon X_+ A_1(\omega) X_+^*, \tag{4.14}$$

que as funções matriciais $G$ e $A_1(\omega)$ admitem uma factorização generalizada esquerda somente simultaneamente, e que os seus índices parciais coincidem. Assim, sem perda de generalidade, podemos concentrar-nos no estudo da função matricial $A_1(\omega)$.

Por (3.2), temos que $-1 \in \rho(N_+(\omega))$. Assim, a função matricial $A_1(\omega)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda

$$A_1(\omega) = A_+ A_-.$$

Obtemos

$$G = \varepsilon X_+ A_+ A_- X_+^*.$$

Podemos concluir que a função matricial $G$ admite a seguinte factorização generalizada canónica esquerda onde os factores surgem representados através dos factores de uma factorização generalizada canónica esquerda de $A_1(\omega)$, que podem ser determinados explicitamente através das soluções das equações não homogéneas

$$(N_+(\omega)+I)u_+ = 1 \quad \text{e} \quad (N_+(\omega)+I)v_+ = P_+\omega.$$

Temos

$$G = G_+G_-,$$

onde

$$G_+ = \varepsilon X_+ A_+ \quad \text{e} \quad G_- = A_- X_+^*.$$

### 4.3.2 O caso $b \in [C(\mathbb{T}) + L_\infty^+(\mathbb{T})]_{n,n}$

Vejamos agora o caso quando $b$ possui todas as componentes na álgebra de Douglas. Nesse caso, $N_+(b)$ é um operador autoadjunto compacto (ver Lema 2.1). Logo, o resolvente de $N_+(b)$ pode ser representado em termos das suas funções próprias e valores próprios. Assim, usando a Proposição 3.2 podemos reescrever os factores (4.8) e (4.9).

Já sabemos que

$$x_+ = \gamma R(N_+(b), -\gamma I)e = e - K(e),$$

com

$$K(e) = [K(e_1); \cdots ; K(e_n)], \qquad K(e_j) = \sum_k \frac{\lambda_k (e_j, \nu_k^+)}{\lambda_k + \gamma}\nu_k^+$$

e $e_j$ é uma matriz coluna com componentes nulas excepto a j-ésima onde possui o valor 1.

Vamos calcular $(e_j, \nu_m^+)$. Seja $\nu_m^+ = \begin{pmatrix} \nu_{m_1}^+ & \cdots & \nu_{m_n}^+ \end{pmatrix}^T$. Vem que

$$(e_j, \nu_m^+) = \int_{\mathbb{T}} 1.\overline{\nu_{mj}^+(t)}|dt| = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\nu_{mj}^+(t)}}{it} dt = 2\pi\overline{\nu_{mj}^+(0)}.$$

Assim,

$$x_+ = e - K(e)$$

com

$$K(e_j) = \sum_k \frac{2\pi\lambda_k\overline{\nu_{kj}^+(0)}}{\lambda_k + \gamma}\nu_k^+.$$

De

$$y_+ = \gamma R(N_+(b), -\gamma I)P_+b$$

podemos concluir que

$$y_+ = P_+b - K(P_+b),$$

com

$$b = [b_1; \cdots ; b_n],\ P_+b = [P_+b_1; \cdots ; P_+b_n],\ K(P_+b) = [K(P_+b_1); \cdots ; K(P_+b_n)]$$

e

$$K(P_+b_j) = \sum_k \frac{\lambda_k(P_+b_j, \nu_k^+)}{\lambda_k + \gamma}\nu_k^+.$$

Estamos em condições de enunciar um resultado, cuja demonstração sai directamente dos cálculos anteriores e que nos mostra que as funções matriciais (4.8) e (4.9) podem ser obtidas através dos valores próprios e funções próprias de $N_+(b)$.

**Teorema 4.5** *A função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda se e só se $-\gamma \in \rho(N_+(b))$. E, nesse caso,*

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-,$$

*onde*

$$A_\gamma^+ = \begin{pmatrix} e - K(e) & P_+b - K(P_+b) \\ P_+[b^*(e - K(e))] & \gamma e + P_+\{b^*[P_+b - K(P_+b)]\} \end{pmatrix},$$

$$A_\gamma^- =$$

$$\begin{pmatrix} e + \frac{1}{\gamma}P_-\{bP_-[b^*(e-K(e))]\} & \frac{1}{\gamma}P_-\{bP_-[b^*(P_+b-K(P_+b))]\} - P_-b \\ -\frac{1}{\gamma}P_-[b^*(e-K(e))] & e - \frac{1}{\gamma}P_-[b^*(P_+b-K(P_+b))] \end{pmatrix}^{-1},$$

$$e = [e_1, \ldots, e_n] \quad e \quad K(e_j) = \sum_k \frac{2\pi\lambda_k \overline{\nu_{kj}^+(0)}}{\lambda_k + \gamma}\nu_k^+.$$

### 4.3.3 O caso $b \in [\mathcal{A}(\mathbb{T})]_{n,n}$

Consideremos uma álgebra decomponível de funções contínuas $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ e seja

$$\mathcal{A}^\pm(\mathbb{T}) = \mathcal{A}(\mathbb{T}) \cap C^\pm(\mathbb{T}).$$

Seja $b \in [\mathcal{A}(\mathbb{T})]_{n,n}$. Assim, se considerarmos uma decomposição

$$b = b_- + b_+,$$

onde $b_\pm \in [\mathcal{A}^\pm(\mathbb{T})]_{n,n}$, então a construção de uma factorização generalizada esquerda da função matricial $A_\gamma(b)$ não depende de $b_-$. De facto, temos que

$$A_\gamma(b) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ b_-^* & e \end{pmatrix} A_\gamma(b_+) \begin{pmatrix} e & b_- \\ 0 & e \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Assim, o problema de factorização da função matricial $A_\gamma(b)$

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ \Lambda A_\gamma^-,$$

é equivalente ao problema de factorização da função matricial $A_\gamma(b_+)$

$$A_\gamma(b_+) = C_\gamma^+ \Lambda C_\gamma^-,$$

onde, obviamente,

$$A_\gamma^+ = \begin{pmatrix} e & 0 \\ b_-^* & e \end{pmatrix} C_\gamma^+ \quad \text{e} \quad A_\gamma^- = C_\gamma^- \begin{pmatrix} e & b_- \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Podemos concluir que uma factorização de $A_\gamma(b_+)$ dá-nos sempre uma factorização de $A_\gamma(b)$, independentemente de quão complicado $b_-$ seja. Este facto revela que temos uma classe bastante geral de funções matriciais para a qual o problema de existência de uma factorização generalizada esquerda explícita só depende da função matricial $b_+$.

Obtemos o seguinte resultado quando $b \in [\mathcal{A}^+(\mathbb{T})]_{n,n}$.

**Teorema 4.6** *A função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda se e só se $-\gamma \in \rho(N_+(b))$. E, nesse caso,*

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-,$$

$$A_\gamma^+ = \begin{pmatrix} e - K(e) & b - K(b) \\ P_+[b^*(e - K(e))] & \gamma e + P_+[b^*(b - K(b))] \end{pmatrix}$$

*e*

$$A_\gamma^- = \begin{pmatrix} e + \frac{1}{\gamma} P_-\{bP_-[b^*(e - K(e))]\} & \frac{1}{\gamma} P_-\{bP_-[b^*(b - K(b))]\} \\ -\frac{1}{\gamma} P_-[b^*(e - K(e))] & e - \frac{1}{\gamma} P_-[b^*(b - K(b))] \end{pmatrix}^{-1},$$

*onde*

$$e = [e_1, \ldots, e_n] \quad e \quad K(e_j) = \sum_k \frac{2\pi\lambda_k \overline{\nu_{kj}^+(0)}}{\lambda_k + \gamma} \nu_k^+.$$

Em particular, quando $n = 1$ temos, usando (4.12):

**Teorema 4.7** *A função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda se e só se $-\gamma \in \rho(N_+(b))$. E, nesse caso,*

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-,$$

$$A_\gamma^+ = \gamma \begin{pmatrix} u_+ & v_+ \\ P_+(\bar{b}u_+) & 1 + P_+(\bar{b}v_+) \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

*e*

$$A_\gamma^- = \begin{pmatrix} 1 - P_-(\bar{b}v_+) & -P_-[bP_-(\bar{b}v_+)] \\ P_-(\bar{b}u_+) & 1 + P_-[bP_-(\bar{b}u_+)] \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

*onde*

$$u_+ = R(N_+(b), -\gamma I)1 \quad \text{e} \quad v_+ = R(N_+(b), -\gamma I)(P_+b).$$

De uma forma mais geral, caso a função matricial $b \in [L_\infty(\mathbb{T})]_{n,n}$ possa ser representada na forma

$$b = b_+ + b_-,$$

onde $b_+ \in \left[L_\infty(\mathbb{T}) \cap L_2^+(\mathbb{T})\right]_{n,n}$ e $b_- \in \left[L_\infty(\mathbb{T}) \cap L_2^{-,0}(\mathbb{T})\right]_{n,n}$, o raciocínio anterior mantém-se válido (desde que a função matricial $A_\gamma(b)$ admita factorização generalizada).

Finalmente, notamos que o estudo do problema de contorno de Riemann

$$\begin{cases} \Psi_+ = A_\gamma^T(b)(E + \Psi_-) \\ \Psi_-(\infty) = 0 \end{cases}$$

e o uso do operador $N_+(b^*)$ (ou do operador $N_-(b^*)$) permite-nos enunciar resultados análogos aos anteriores, os quais dão-nos uma condição necessária e suficiente para a existência de uma factorização generalizada canónica direita de $A_\gamma(b)$, escrita explicitamente na forma

$$A_\gamma(b) = C_\gamma^-(b^*)(C_\gamma^+(b^*))^{-1},$$

onde os factores $C_\gamma^\pm(b^*)$ são dados por

$$C_\gamma^-(b^*) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix} (E + \Phi_-)(b^*) \begin{pmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_\gamma^+(b^*) = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix} \Phi_+(b^*) \begin{pmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a construção de uma factorização generalizada canónica direita explícita depende somente da função $b_-$.

## 4.4 Factorização de $A_\gamma(b)$. Caso não canónico

Analisemos nesta secção o caso quando $n = 1$ e $-\gamma \notin \rho(N_+(b))$.

Sabemos que $\gamma < 0$ (ver propriedade (3.2)). Notamos que neste caso,

$$A_\gamma(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-\gamma} \end{pmatrix} A_{-1}(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-\gamma} \end{pmatrix},$$

onde $\omega = \dfrac{b}{\sqrt{-\gamma}}$ e $N_+(b) = -\gamma N_+(\omega)$. Podemos então utilizar o Teorema 2.22 pois

$$A_{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, assumiremos que $-\gamma \in \sigma(N_+(b))$, i.e., vamos considerar que $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ \Lambda A_\gamma^-, \tag{4.18}$$

onde

$$A_\gamma^\pm = \begin{pmatrix} a_{1,\pm} & a_{2,\pm} \\ c_\pm & d_\pm \end{pmatrix}, \quad \Lambda(t) = \mathrm{diag}(t^\kappa, t^{-\kappa})$$

e

$$\kappa = \mathrm{dimKer}(N_+(b) + \gamma I). \tag{4.19}$$

A primeira diferença que surge relativamente ao caso canónico é o seguinte resultado.

**Proposição 4.1** *Se $-\gamma \in \sigma(N_+(b))$, então o problema (4.7) não é solúvel.*

**Demonstração.** Considerando $\Phi_\pm = (\overrightarrow{\phi_{\pm 1}}, \overrightarrow{\phi_{\pm 2}})$ e a factorização generalizada (4.18), o problema (4.7) é transformado nos seguintes dois problemas.

(𝔸) $\overrightarrow{\phi_{+1}} = A_\gamma(b)\overrightarrow{\phi_{-1}} + \overrightarrow{g_1}, \quad \overrightarrow{g_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{b} \end{pmatrix}$

(𝔹) $\overrightarrow{\phi_{+2}} = A_\gamma(b)\overrightarrow{\phi_{-2}} + \overrightarrow{g_2}, \quad \overrightarrow{g_2} = \begin{pmatrix} b \\ |b|^2 + \gamma \end{pmatrix}.$

Analisemos o problema $\mathbb{A}$. Se este problema é solúvel quando $\kappa > 0$, as condições (ver Teorema 2.21)

$$\int_{\mathbb{T}} ((A_\gamma^+(t))^{-1} g_1(t))_2 t^k dt = 0, \; k = 0, 1, \ldots, \kappa - 1$$

são satisfeitas. Mas,

$$(A_\gamma^+(t))^{-1} g_1(t) = (A_\gamma^+(t))^{-1} A_\gamma(b(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (A_\gamma^+(t))^{-1} A_\gamma^+(t) \Lambda(t) A_\gamma^-(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \Lambda(t) A_\gamma^-(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^\kappa & 0 \\ 0 & t^{-\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,-}(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^\kappa a_{1,-}(t) \\ t^{-\kappa} c_-(t) \end{pmatrix}.$$

Vem que,

$$\int_{\mathbb{T}} ((A_\gamma^+(t))^{-1} g_1(t))_2 t^k dt = \int_{\mathbb{T}} c_-(t) t^{-\kappa + k} dt, \; k = 0, 1, \ldots, \kappa - 1.$$

Para $k = \kappa - 1$, temos

$$\int_{\mathbb{T}} c_-(t) t^{-1} dt.$$

Se $c_-(\infty) \neq 0$, então $\int_{\mathbb{T}} c_-(t)t^{-1}dt \neq 0$.

Analisemos o problema $\mathbb{B}$. Se este problema é solúvel quando $\kappa > 0$, as condições

$$\int_{\mathbb{T}} ((A_\gamma^+(t))^{-1}g_2(t))_2 t^k dt = 0, \; k = 0, 1, \ldots, \kappa - 1$$

são satisfeitas. Mas,

$$(A_\gamma^+(t))^{-1}g_2(t) = (A_\gamma^+(t))^{-1}A_\gamma(b(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (A_\gamma^+(t))^{-1}A_\gamma^+(t)\Lambda(t)A_\gamma^-(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \Lambda(t)A_\gamma^-(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^\kappa & 0 \\ 0 & t^{-\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2,-}(t) \\ d_-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^\kappa a_{2,-}(t) \\ t^{-\kappa} d_-(t) \end{pmatrix}.$$

Vem que,

$$\int_{\mathbb{T}} ((A_\gamma^+(t))^{-1}g_2(t))_2 t^k dt = \int_{\mathbb{T}} d_-(t)t^{-\kappa+k}dt, \; k = 0, 1, \ldots, \kappa - 1.$$

Para $k = \kappa - 1$, temos

$$\int_{\mathbb{T}} d_-(t)t^{-1}dt.$$

Se $d_-(\infty) \neq 0$, então $\int_{\mathbb{T}} d_-(t)t^{-1}dt \neq 0$.

Como $A_\gamma^-(t)$ é invertível $\forall t \in \mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}$, temos que $c_-(\infty)$ e $d_-(\infty)$ não podem ser ambos iguais a zero. Assim, $c_-(\infty) \neq 0$ e/ou $d_-(\infty) \neq 0$. Ou seja,

$$\int_{\mathbb{T}} c_-(t)t^{-1}dt \neq 0 \quad \vee \quad \int_{\mathbb{T}} d_-(t)t^{-1}dt \neq 0.$$

Logo, os problemas ($\mathbb{A}$) e ($\mathbb{B}$) não são solúveis simultaneamente.

Concluímos que o problema (4.7) não é solúvel.

■

Outra diferença que surge relativamente ao caso canónico é que se uma função matricial $A$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda, então existe uma factorização generalizada $A = A_+A_-$ tal que $A_-(\infty) =$

$E$. Mas, se $A$ admite uma factorização generalizada não canónica esquerda, então uma factorização generalizada $A = A_+ \Lambda A_-$, tal que $A_-(\infty) = E$, nem sempre existe. Podemos ter três casos diferentes:

(**caso 1**)

$$A_-(\infty) = \begin{pmatrix} a_{1,-}(\infty) & a_{2,-}(\infty) \\ 0 & d_-(\infty) \end{pmatrix},$$

$a_{1,-}(\infty) \neq 0$, $d_-(\infty) \neq 0$ e $a_{2,-}(\infty)$ arbitrário,

(**caso 2**)

$$A_-(\infty) = \begin{pmatrix} a_{1,-}(\infty) & a_{2,-}(\infty) \\ c_-(\infty) & 0 \end{pmatrix},$$

$a_{2,-}(\infty) \neq 0$, $c_-(\infty) \neq 0$ e $a_{1,-}(\infty)$ arbitrário,

(**caso 3**)

$$A_-(\infty) = \begin{pmatrix} a_{1,-}(\infty) & a_{2,-}(\infty) \\ c_-(\infty) & d_-(\infty) \end{pmatrix},$$

$c_-(\infty) \neq 0$, $d_-(\infty) \neq 0$, $a_{1,-}(\infty)$ e $a_{2,-}(\infty)$ tais que não sejam simultaneamente iguais a zero.

Para cada um destes casos, temos problemas associados diferentes.

Comecemos por um resultado que será utilizado para a função $c_-$ e/ou para a função $d_-$, dependendo de $A_-(\infty)$.

**Proposição 4.2** *Se $f_-(\infty) \neq 0$, então existe um único polinómio de grau $\kappa$, $r_\kappa(t) = t^\kappa + s_{\kappa-1}(t)$, tal que*

$$P_+\left(f_-(t) r_\kappa(t)\right) = f_-(\infty) t^\kappa.$$

**Demonstração.**

Sejam $\alpha_i$ os coeficientes da representação em série de Laurent da função $f_-(t)$. Seja $\alpha_0 = f_-(\infty)$ e $r_\kappa(t) = t^\kappa + a_{\kappa-1} t^{\kappa-1} + \ldots + a_1 t + a_0$.

Ao pretendermos determinar um polinómio $r_\kappa$ tal que

$$P_+\left(f_-(t)r_\kappa(t)\right) = f_-(\infty)t^\kappa,$$

obtemos o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_1 + f_-(\infty)a_{\kappa-1} = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_1 a_{\kappa-1} + f_-(\infty)a_{\kappa-2} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{\kappa-1} + \ldots + \alpha_1 a_2 + f_-(\infty)a_1 = 0 \\ \alpha_\kappa + \cdots + \alpha_1 a_1 + f_-(\infty)a_0 = 0 \end{array}\right. .$$

Como

$$\left|\begin{array}{ccccc} f_-(\infty) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & f_-(\infty) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \alpha_{\kappa-2} & \alpha_{\kappa-3} & \ldots & f_-(\infty) & 0 \\ \alpha_{\kappa-1} & \alpha_{\kappa-2} & \ldots & \alpha_1 & f_-(\infty) \end{array}\right| = (f_-(\infty))^\kappa \neq 0,$$

o sistema tem solução única.

Logo, existe um único polinómio, $r_\kappa(t) = t^\kappa + s_{\kappa-1}(t)$, tal que

$$P_+\left(f_-(t)r_\kappa(t)\right) = f_-(\infty)t^\kappa.$$

■

**Proposição 4.3** ***(Caso 1)*** *Se $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada esquerda (4.18), com $c_-(\infty) = 0$, então existe um único polinómio de grau $\kappa$, $r_\kappa(t) = t^\kappa + s_{\kappa-1}(t)$, tal que o problema*

$$\Phi_+ = A_\gamma(b)\left(\Phi_- + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_\kappa \end{pmatrix}\right), \tag{4.20}$$

*$\Phi_-(\infty) = 0_{2\times 2}$, é solúvel.*

**Demonstração.**

Se $\kappa = 0$, temos que $r_0(t) \equiv 1$.

Seja $\kappa > 0$. Analisemos o problema

$$\Phi_+ - A_\gamma(b)\Phi_- = \underbrace{A_\gamma(b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_\kappa \end{pmatrix}}_{g(t)}.$$

Considerando

$$\Phi_\pm = (\overrightarrow{\phi_{\pm 1}}, \overrightarrow{\phi_{\pm 2}})$$

e a factorização (4.18), o problema (4.20) é transformado nos dois problemas seguintes

$$(\mathbb{A})\ \ \overrightarrow{\phi_{+1}} - A_\gamma(b)\overrightarrow{\phi_{-1}} = \overrightarrow{g_1}, \quad \overrightarrow{g_1(t)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{b(t)} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{B})\ \ \overrightarrow{\phi_{+2}} - A_\gamma(b)\overrightarrow{\phi_{-2}} = \overrightarrow{g_2}, \quad \overrightarrow{g_2(t)} = \begin{pmatrix} b(t)r_\kappa(t) \\ (|b(t)|^2 + \gamma)r_\kappa(t) \end{pmatrix}.$$

Usando o Teorema 2.20 temos que o problema $(\mathbb{A})$ é solúvel se e só se

i) $(A_\gamma^+)^{-1}g_1 \in [\mathcal{L}_1(\mathbb{T})]_2$;

ii) $\phi_{1,0}^+ = A_\gamma^+ P_+[(A_\gamma^+)^{-1}g_1] \in [L_2^+(\mathbb{T})]_2$;

iii) $-\phi_{1,0}^- = (A_\gamma^-)^{-1}\Lambda^{-1}P_-[(A_\gamma^+)^{-1}g_1] \in [L_2^{-,0}(\mathbb{T})]_2$.

Como

i) $(A_\gamma^+(t))^{-1}g_1(t) = (A_\gamma^+(t))^{-1}A_\gamma(b)(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (A_\gamma^+(t))^{-1}(A_\gamma^+(t))\Lambda(t)A_\gamma^-(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \Lambda(t)A_\gamma^-(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^\kappa & 0 \\ 0 & t^{-\kappa} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,-}(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^\kappa a_{1,-}(t) \\ t^{-\kappa}c_-(t) \end{pmatrix} \in$ $[\mathcal{L}_1(\mathbb{T})]_2$;

ii) $\phi_{1,0}^+(t) = A_\gamma^+(t)P_+[(A_\gamma^+(t))^{-1}g_1(t)] = A_\gamma^+(t)P_+\begin{pmatrix} t^\kappa a_{1,-}(t) \\ t^{-\kappa}c_-(t) \end{pmatrix}$

$$= A_\gamma^+(t)\begin{pmatrix} P_+(t^\kappa a_{1,-}(t)) \\ P_+(t^{-\kappa}c_-(t)) \end{pmatrix} = A_\gamma^+(t)\begin{pmatrix} P_+(t^\kappa a_{1,-}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \in [L_2^+(\mathbb{T})]_2;$$

iii) $\phi_{1,0}^-(t) = -(A_\gamma^-(t))^{-1}(\Lambda(t))^{-1}P_-[(A_\gamma^+(t))^{-1}g_1(t)]$

$$= -(A_\gamma^-(t))^{-1}\begin{pmatrix} t^{-\kappa} & 0 \\ 0 & t^\kappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_-(t^\kappa a_{1,-}(t)) \\ P_-(t^{-\kappa}c_-(t)) \end{pmatrix}$$

$$= -(A_\gamma^-(t))^{-1}\begin{pmatrix} t^{-\kappa}P_-(t^\kappa a_{1,-}(t)) \\ c_-(t) \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} e_-(t) & f_-(t) \\ g_-(t) & h_-(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-\kappa}P_-(t^\kappa a_{1,-}(t)) \\ c_-(t)) \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} e_-(t)t^{-\kappa}P_-(t^\kappa a_{1,-}(t)) + f_-(t)c_-(t) \\ g_-(t)t^{-\kappa}P_-(t^\kappa a_{1,-}(t)) + h_-(t)c_-(t) \end{pmatrix}$$

como as funções $e_-(t)t^{-\kappa}P_-(t^\kappa a_{1,-}(t))$ e $g_-(t)t^{-\kappa}P_-(t^{-\kappa}a_{1,-}(t))$ se anulam no $\infty$ e $c_-(\infty) = 0$, então $\phi_{1,0}^- \in [L_2^{-,0}(\mathbb{T})]_2$.

Logo, o problema ($\mathbb{A}$) é solúvel.

Vejamos agora o problema ($\mathbb{B}$). É solúvel se e só se

i) $(A_\gamma^+)^{-1}g_2 \in [\mathcal{L}_1(\mathbb{T})]_2$;

ii) $\phi_{2,0}^+ = A_\gamma^+ P_+[(A_\gamma^+)^{-1}g_2] \in [L_2^+(\mathbb{T})]_2$;

iii) $-\phi_{2,0}^- = (A_\gamma^-)^{-1}\Lambda^{-1}P_-[(A_\gamma^+)^{-1}g_2] \in [L_2^{-,0}(\mathbb{T})]_2$.

Como

i) $(A_\gamma^+(t))^{-1}g_2(t) = (A_\gamma^+(t))^{-1}A_\gamma(b)(t)\begin{pmatrix} 0 \\ r_\kappa(t) \end{pmatrix}$

$$= (A_\gamma^+(t))^{-1}(A_\gamma^+(t))\Lambda(t)A_\gamma^-(t)\begin{pmatrix} 0 \\ r_\kappa(t) \end{pmatrix} = \Lambda(t)A_\gamma^-(t)\begin{pmatrix} 0 \\ r_\kappa(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t^{\kappa} & 0 \\ 0 & t^{-\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t) \\ d_{-}(t)r_{\kappa}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t) \\ t^{-\kappa}d_{-}(t)r_{\kappa}(t) \end{pmatrix} \in [\mathcal{L}_1(\mathbb{T})]_2;$$

ii) $\phi^{+}_{2,0}(t) = A^{+}_{\gamma}(t)P_{+}[(A^{+}_{\gamma}(t))^{-1}g_2(t)] = A^{+}_{\gamma}(t) \begin{pmatrix} P_{+}(t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t)) \\ P_{+}(t^{-\kappa}d_{-}(t)r_{\kappa}(t)) \end{pmatrix} \in$ $[L^{+}_2(\mathbb{T})]_2$;

iii) $\phi^{-}_{2,0}(t) = -(A^{-}_{\gamma}(t))^{-1}(\Lambda(t))^{-1}P_{-}[(A^{+}_{\gamma}(t))^{-1}g_2(t)]$

$$= (A^{-}_{\gamma}(t))^{-1} \begin{pmatrix} t^{-\kappa} & 0 \\ 0 & t^{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{-}(t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t)) \\ P_{-}(t^{-\kappa}d_{-}(t)r_{\kappa}(t)) \end{pmatrix}$$

$$= -(A^{-}_{\gamma}(t))^{-1} \begin{pmatrix} t^{-\kappa}P_{-}(t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t)) \\ t^{\kappa}P_{-}(t^{-\kappa}d_{-}(t)r_{\kappa}(t)) \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} e_{-}(t) & f_{-}(t) \\ g_{-}(t) & h_{-}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-\kappa}P_{-}(t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t)) \\ t^{\kappa}P_{-}(t^{-\kappa}d_{-}(t)r_{\kappa}(t)) \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} e_{-}(t)t^{-\kappa}P_{-}(t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t)) + f_{-}(t)t^{\kappa}P_{-}(t^{-\kappa}d_{-}(t)r_{\kappa}(t)) \\ g_{-}(t)t^{-\kappa}P_{-}(t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t)) + h_{-}(t)t^{\kappa}P_{-}(t^{-\kappa}d_{-}(t)r_{\kappa}(t)) \end{pmatrix}$$

como as funções $e_{-}(t)t^{-\kappa}P_{-}(t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t))$ e $g_{-}(t)t^{-\kappa}P_{-}(t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t))$ se anulam no $\infty$ e $d_{-}(\infty) \neq 0$, temos que

$$-\phi^{-}_{2,0}(t) = \begin{pmatrix} e_{-}(t)t^{-\kappa}P_{-}(t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t)) + f_{-}(t)t^{\kappa}(t^{-\kappa}d_{-}(t)r_{\kappa}(t) - d_{-}(\infty)) \\ g_{-}(t)t^{-\kappa}P_{-}(t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_{\kappa}(t)) + h_{-}(t)t^{\kappa}(t^{-\kappa}d_{-}(t)r_{\kappa}(t) - d_{-}(\infty)) \end{pmatrix}.$$

Para que $\phi^{-}_{2,0} \in [L^{-,0}_2(\mathbb{T})]_2$ é suficiente que

$$P_{+}(t^{\kappa}(t^{-\kappa}d_{-}(t)r_{\kappa}(t) - d_{-}(\infty))) = 0$$

$$\Longleftrightarrow P_{+}(d_{-}(t)r_{\kappa}(t) - d_{-}(\infty))t^{\kappa}) = 0$$

$$\Longleftrightarrow P_{+}(d_{-}(t)r_{\kappa}(t)) = d_{-}(\infty)t^{\kappa}.$$

Como existe um único polinómio de grau $\kappa$, $r_\kappa(t) = t^\kappa + s_{\kappa-1}(t)$, tal que $P_+\left(d_-(t)r_\kappa(t)\right) = d_-(\infty)t^\kappa$ (ver Proposição 4.2), o problema ($\mathbb{B}$) é solúvel. Consequentemente, o problema (4.20) é solúvel ■

De uma forma similar obtemos as proposições:

**Proposição 4.4** ***(Caso 2)*** *Se $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada esquerda (4.18), com $d_-(\infty) = 0$, então existe um único polinómio de grau $\kappa$, $r_\kappa(t) = t^\kappa + s_{\kappa-1}(t)$, tal que o problema*

$$\Phi_+ = A_\gamma(b)\left(\Phi_- + \begin{pmatrix} r_\kappa & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \tag{4.21}$$

$\Phi_-(\infty) = 0_{2\times 2}$, *é solúvel.*

**Proposição 4.5** ***(Caso 3)*** *Se $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada esquerda (4.18), com $c_-(\infty) \neq 0$ e $d_-(\infty) \neq 0$, então existem dois únicos polinómios de grau $\kappa$, $r_{1,\kappa}(t) = t^\kappa + s_{1,\kappa-1}(t)$ e $r_{2,\kappa}(t) = t^\kappa + s_{2,\kappa-1}(t)$, tais que o problema*

$$\Phi_+ = A_\gamma(b)\left(\Phi_- + \begin{pmatrix} r_{1,\kappa} & 0 \\ 0 & r_{2,\kappa} \end{pmatrix}\right), \tag{4.22}$$

$\Phi_-(\infty) = 0_{2\times 2}$, *é solúvel.*

Podemos sintetizar os resultados anteriores na Proposição seguinte.

**Proposição 4.6** *Se $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada esquerda (4.18), então*

$$\exists \quad r_{i,\kappa}(t) = a_{i,0}t^\kappa + s_{i,\kappa-1}(t), \quad i = 1, 2$$

*tais que o problema*

$$\Phi_+ = A_\gamma(b)\left(\Phi_- + \begin{pmatrix} r_{1,\kappa} & 0 \\ 0 & r_{2,\kappa} \end{pmatrix}\right),$$

$\Phi_-(\infty) = 0_{2\times 2}$, *é solúvel.*

Para obtermos uma factorização explícita de $A_\gamma(b)$ precisamos de resolver duas equações não homogéneas. Em primeiro lugar, para cada caso, temos de resolver o problema associado, (4.20), (4.21) ou (4.22). Depois, através das soluções desses problemas obtemos uma factorização generalizada não canónica da função matricial $A_\gamma(b)$, através das soluções de duas equações não homogéneas.

Analisemos em pormenor o **Caso 1**.

**Teorema 4.8** ***(Caso 1)***

*Se o problema* (4.20) *é solúvel, então as equações*

$$(N_+(b) + \gamma I)x_+ = \gamma \tag{4.23}$$

*e*

$$(N_+(b) + \gamma I)y_+ = \gamma P_+(b\, r_\kappa), \tag{4.24}$$

*são solúveis. E, neste caso, as soluções de (4.20) podem ser representadas na forma*

$$\Phi_+ = \begin{pmatrix} \phi_{11}^+ & \phi_{12}^+ \\ P_+(\bar{b}\phi_{11}^+) & \gamma r_\kappa + P_+(\bar{b}\phi_{12}^+) \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

$$\Phi_- = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} P_-[bP_-(\bar{b}\phi_{11}^+)] & -\gamma P_-(br_\kappa) + P_-[bP_-(\bar{b}\phi_{12}^+)] \\ -P_-(\bar{b}\phi_{11}^+) & -P_-(\bar{b}\phi_{12}^+) \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

*onde* $\phi_{11}^+$ *e* $\phi_{12}^+$ *são soluções de* (*4.23*) *e* (*4.24*), *respectivamente, e* $A_\gamma(b)$ *admite a factorização generalizada*

$$A_\gamma(b) = F_+ \Lambda F_-,$$

*onde*

$$F_+ = \Phi_+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} t^\kappa & 0 \\ 0 & t^{-\kappa} \end{pmatrix}, \quad F_- = \Lambda^{-1} F_+^{-1} A_\gamma(b),$$

$$\kappa = \dim \operatorname{Ker}(N_+(b) + \gamma I) \quad e \quad \Delta = \frac{1}{\gamma} \det \Phi_+.$$

**Demonstração.** Seja

$$\Phi_\pm = \begin{pmatrix} \phi_{11}^\pm & \phi_{12}^\pm \\ \phi_{21}^\pm & \phi_{22}^\pm \end{pmatrix}$$

uma solução do problema (4.20). Assim,

$$\begin{pmatrix} \phi_{11}^+ & \phi_{12}^+ \\ \phi_{21}^+ & \phi_{22}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ \overline{b} & |b|^2 + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11}^- + 1 & \phi_{12}^- \\ \phi_{21}^- & \phi_{22}^- + r_\kappa \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{cases} \phi_{11}^+ = \phi_{11}^- + 1 + b\,\phi_{21}^- \\ \phi_{12}^+ = \phi_{12}^- + b\,\phi_{22}^- + b\,r_\kappa \\ \phi_{21}^+ = \overline{b}\,\phi_{11}^+ + \gamma\,\phi_{21}^- \\ \phi_{22}^+ = \overline{b}\,\phi_{12}^+ + \gamma\,\phi_{22}^- + \gamma\,r_\kappa \end{cases}.$$

Aplicando o operador de projecção $P_+$ às duas primeiras equações e o operador de projecção $P_-$ às duas últimas, obtemos que

$$\begin{cases} \phi_{11}^+ = 1 + P_+(b\,\phi_{21}^-) \\ \phi_{12}^+ = P_+(b\,\phi_{22}^-) + P_+(b\,r_\kappa) \\ 0 = P_-(\overline{b}\,\phi_{11}^+) + \gamma\,\phi_{21}^- \\ 0 = P_-(\overline{b}\,\phi_{12}^+) + \gamma\,\phi_{22}^- \end{cases}.$$

Assim,

$$(N_+(b)+\gamma I)\phi_{11}^+ = P_+[bP_-(\overline{b}\,\phi_{11}^+)]+\gamma\,\phi_{11}^+ = -\gamma P_+(b\;\phi_{21}^-)+\gamma[1+P_+(b\,\phi_{21}^-)] = \gamma$$

e

$$(N_+(b)+\gamma I)\phi_{12}^+ = P_+[bP_-(\overline{b}\,\phi_{12}^+)]+\gamma\,\phi_{12}^+ = -\gamma P_+(b\;\phi_{22}^-)+\gamma[P_+(b\,\phi_{22}^-)+P_+(b\,r_\kappa)]$$

$$= \gamma P_+(b\,r_\kappa).$$

Concluímos que $\phi_{11}^+$ e $\phi_{12}^+$ são soluções de (4.23) e (4.24), respectivamente. Além disso,

$$\phi_{21}^- = -\frac{1}{\gamma}P_-(\overline{b}\,\phi_{11}^+),$$

$$\phi_{22}^- = -\frac{1}{\gamma}P_-(\overline{b}\,\phi_{12}^+),$$

$$\phi_{11}^- = \phi_{11}^+ - 1 - b\,\phi_{21}^- = -P_-(b\,\phi_{21}^-) = \frac{1}{\gamma}P_-[b\,P_-(\overline{b}\,\phi_{11}^+)],$$

$$\phi_{12}^- = \phi_{12}^+ - b\,\phi_{22}^- - b\,r_\kappa = -P_-(b\,\phi_{22}^-) - P_-(br_\kappa) = \frac{1}{\gamma}P_-[b\,P_-(\overline{b}\,\phi_{12}^+)] - P_-(br_\kappa),$$

$$\phi_{21}^+ = \overline{b}\,\phi_{11}^+ + \gamma\,\phi_{21}^- = P_+(\overline{b}\,\phi_{11}^+)$$

e

$$\phi_{22}^+ = \overline{b}\,\phi_{12}^+ + \gamma\,\phi_{22}^- + \gamma\,r_\kappa = P_+(\overline{b}\,\phi_{12}^+) + \gamma\,r_\kappa.$$

Portanto, as soluções do problema (4.20) podem ser escritas na forma (4.25) e (4.26).

Por outro lado, podemos ter as soluções do problema (4.20) representadas através dos factores da factorização generalizada (4.18). De facto, considerando

$$\Phi_\pm = (\overrightarrow{\phi_{\pm 1}},\ \overrightarrow{\phi_{\pm 2}})$$

e usando o Teorema 2.20, obtemos que

$\diamondsuit$ $\overrightarrow{\Phi_{-1}}$:

$$\overrightarrow{\Phi_{-1}} = \overrightarrow{\Phi_{1,0}^{-}} - (A_\gamma^-)^{-1}\Lambda^{-1}\overrightarrow{\rho_1}, \qquad \overrightarrow{\rho_1}(t) = \begin{pmatrix} p_{\kappa-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $p_{\kappa-1}(t)$ é um polinómio de grau menor ou igual a $\kappa - 1$. Vem que

$$\overrightarrow{\Phi_{-1}} = -(A_\gamma^-)^{-1}\Lambda^{-1}P_-(A_\gamma^+)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ \bar{b} \end{pmatrix} - (A_\gamma^-)^{-1}\Lambda^{-1}\overrightarrow{\rho_1},$$

ou seja,

$$\overrightarrow{\Phi_{-1}}(t) = -(A_\gamma^-(t))^{-1}\begin{pmatrix} t^{-\kappa} & 0 \\ 0 & t^{\kappa} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} P_-(t^{\kappa}a_{1,-}(t)) \\ P_-(t^{-\kappa}c_-(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{\kappa-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= -(A_\gamma^-(t))^{-1}\begin{pmatrix} t^{-\kappa}P_-(t^{\kappa}a_{1,-}(t)) + t^{-\kappa}p_{\kappa-1}(t) \\ t^{\kappa}P_-(t^{-\kappa}c_-(t)) \end{pmatrix}.$$

Como $P_-(t^{-\kappa}c_-(t)) = t^{-\kappa}c_-(t)$, vem

$$\overrightarrow{\Phi_{-1}}(t) = -(A_\gamma^-(t))^{-1}\begin{pmatrix} t^{-\kappa}[P_-(t^{\kappa}a_{1,-}(t)) + p_{\kappa-1}(t)] \\ c_-(t) \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$ $\overrightarrow{\Phi_{-2}}$:

$$\overrightarrow{\Phi_{-2}} = \overrightarrow{\Phi_{2,0}^{-}} - (A_\gamma^-)^{-1}\Lambda^{-1}\overrightarrow{\rho_2}, \qquad \overrightarrow{\rho_2}(t) = \begin{pmatrix} q_{\kappa-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $q_{\kappa-1}(t)$ é um polinómio de grau menor ou igual a $\kappa - 1$. Assim,

$$\overrightarrow{\Phi_{-2}} = -(A_\gamma^-)^{-1}\Lambda^{-1}P_-(A_\gamma^+)^{-1}\begin{pmatrix} br_\kappa \\ (|b|^2+\gamma)r_\kappa \end{pmatrix} - (A_\gamma^-)^{-1}\Lambda^{-1}\overrightarrow{\rho_2},$$

ou seja,

$$\overrightarrow{\Phi_{-2}}(t) = -(A_\gamma^-(t))^{-1}\begin{pmatrix} t^{-\kappa}[P_-(t^{\kappa}a_{2,-}(t)r_\kappa(t)) + q_{\kappa-1}(t)] \\ t^{\kappa}P_-(t^{-\kappa}d_-(t)r_\kappa(t)) \end{pmatrix}.$$

Como $d_-(\infty) \neq 0$, vem

$$\overrightarrow{\Phi_{-2}}(t) = -(A_\gamma^-(t))^{-1} \begin{pmatrix} t^{-\kappa}[P_-(t^\kappa a_{2,-}(t) r_\kappa(t)) + q_{\kappa-1}(t)] \\ t^\kappa(t^{-\kappa} d_-(t) r_\kappa(t) - d_-(\infty)) \end{pmatrix}$$

$$= -(A_\gamma^-(t))^{-1} \begin{pmatrix} t^{-\kappa}[P_-(t^\kappa a_{2,-}(t) r_\kappa(t)) + q_{\kappa-1}(t)] \\ d_-(t) r_\kappa(t) - d_-(\infty) t^\kappa \end{pmatrix}.$$

Como

$$P_+(d_-(t) r_\kappa(t)) = d_-(\infty) t^\kappa,$$

resulta que

$$d_-(t) r_\kappa(t) - d_-(\infty) t^\kappa = P_-(d_-(t) r_\kappa(t)).$$

Assim,

$$\overrightarrow{\Phi_{-2}}(t) = -(A_\gamma^-(t))^{-1} \begin{pmatrix} t^{-\kappa}[P_-(t^\kappa a_{2,-}(t) r_\kappa(t)) + q_{\kappa-1}(t)] \\ P_-(d_-(t) r_\kappa(t)) \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$ $\overrightarrow{\Phi_{+1}}$:

$$\overrightarrow{\Phi_{+1}} = \overrightarrow{\Phi_{1,0}^+} + (A_\gamma^+)\overrightarrow{\rho_1}, \qquad \overrightarrow{\rho_1}(t) = \begin{pmatrix} p_{\kappa-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $p_{\kappa-1}(t)$ é o polinómio de grau menor ou igual a $\kappa - 1$ já referido. Ou seja,

$$\overrightarrow{\Phi_{+1}} = A_\gamma^+ P_+(A_\gamma^+)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{b} \end{pmatrix} + A_\gamma^+ \overrightarrow{\rho_1}.$$

Isto é,

$$\overrightarrow{\Phi_{+1}}(t) = A_\gamma^+(t) \begin{pmatrix} P_+(t^\kappa a_{1,-}(t)) + p_{\kappa-1}(t) \\ P_+(t^{-\kappa} c_-(t)) \end{pmatrix}.$$

Como $P_+(t^{-\kappa}c_-(t)) = 0$, vem

$$\overrightarrow{\Phi_{+1}}(t) = A_\gamma^+(t)\begin{pmatrix} P_+(t^\kappa a_{1,-}(t)) + p_{\kappa-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$ $\overrightarrow{\Phi_{+2}}$:

$$\overrightarrow{\Phi_{+2}} = \overrightarrow{\Phi_{2,0}^+} + A_\gamma^+\overrightarrow{\rho_2}, \qquad \overrightarrow{\rho_2}(t) = \begin{pmatrix} q_{\kappa-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $q_{\kappa-1}(t)$ é o polinómio de grau menor ou igual a $\kappa - 1$ já referido. Ou seja,

$$\overrightarrow{\Phi_{+2}} = A_\gamma^+ P_+(A_\gamma^+)^{-1}\begin{pmatrix} br_\kappa \\ (|b|^2+\gamma)r_\kappa \end{pmatrix} + A_\gamma^+\overrightarrow{\rho_2}.$$

Isto é,

$$\overrightarrow{\Phi_{+2}}(t) = A_\gamma^+(t)\begin{pmatrix} P_+(t^\kappa a_{2,-}(t)r_\kappa(t)) + q_{\kappa-1}(t) \\ P_+(t^{-\kappa}d_-(t)r_\kappa(t)) \end{pmatrix}.$$

Como $P_+(t^{-\kappa}d_-(t)r_\kappa(t)) = d_-(\infty)$, vem

$$\overrightarrow{\Phi_{+2}}(t) = A_\gamma^+(t)\begin{pmatrix} P_+(t^\kappa a_{2,-}(t)r_\kappa(t)) + q_{\kappa-1}(t) \\ d_-(\infty) \end{pmatrix}.$$

Temos assim os factores $\Phi_-(t)$ e $\Phi_+(t)$, expressos através dos polinómios $p_{\kappa-1}(t)$ e $q_{\kappa-1}(t)$ :

$$\Phi_-(t) = -(A_\gamma^-(t))^{-1}\begin{pmatrix} t^{-\kappa}[P_-(t^\kappa a_{1,-}(t)) + p_{\kappa-1}(t)] & t^{-\kappa}[P_-(t^\kappa a_{2,-}(t)r_\kappa(t)) + q_{\kappa-1}(t)] \\ c_-(t) & P_-(d_-(t)r_\kappa(t)) \end{pmatrix}$$

e

$$\Phi_+(t) = A_\gamma^+(t)\begin{pmatrix} P_+(t^\kappa a_{1,-}(t)) + p_{\kappa-1}(t) & P_+(t^\kappa a_{2,-}(t)r_\kappa(t)) + q_{\kappa-1}(t) \\ 0 & d_-(\infty) \end{pmatrix}.$$

Visto que podemos sempre assumir que

$$\det A_\gamma^+(t) = \gamma$$

e

$$\Phi_+ = A_\gamma^+ \begin{pmatrix} \alpha_\kappa & \beta_{2\kappa} \\ 0 & d_-(\infty) \end{pmatrix},$$

onde $\alpha_\kappa$ é um polinómio de grau $\kappa$ e $\beta_{2\kappa}$ é um polinómio de grau menor ou igual a $2\kappa$, podemos considerar que

$$\det\Phi_+ = \gamma d_-(\infty)\alpha_\kappa.$$

Temos que

$$\Phi_+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_\gamma^+ \begin{pmatrix} \alpha_\kappa & \beta_{2\kappa} \\ 0 & d_-(\infty) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_\gamma^+ \begin{pmatrix} \frac{\alpha_\kappa}{\Delta} & \beta_{2\kappa} \\ 0 & d_-(\infty) \end{pmatrix}$$

$$= A_\gamma^+ \begin{pmatrix} \frac{1}{d_-(\infty)} & \beta_{2\kappa} \\ 0 & d_-(\infty) \end{pmatrix}.$$

É sabido que qualquer factor $\widetilde{A}_\gamma^+$ de uma factorização de $A_\gamma(b)$,

$$A_\gamma(b) = \widetilde{A}_\gamma^+ \Lambda \widetilde{A}_\gamma^-,$$

pode ser representado como

$$\widetilde{A}_\gamma^+ = A_\gamma^+ \begin{pmatrix} c_1 & l_{2\kappa} \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

onde $l_{2\kappa}$ é um polinómio de grau menor ou igual a $2\kappa$, $c_1$ e $c_2$ são constantes não nulas (ver Teorema 2.14).

Assim, obtemos uma factorização de $A_\gamma(b)$,

$$A_\gamma(b) = F_+ \Lambda F_-, \tag{4.27}$$

onde os factores são definidos da forma

$$F_+ = \Phi_+ \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} t^\kappa & 0 \\ 0 & t^{-\kappa} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F_- = \Lambda^{-1} F_+^{-1} A_\gamma(b).$$

De acordo com o Teorema 2.18, temos que a factorização (4.27) representa uma factorização generalizada da função matricial $A_\gamma(b)$. ■

Podemos obter um resultado similar para o **Caso 2**.

**Teorema 4.9** ***(Caso 2)***

*Se o problema (4.21) é solúvel, então as equações*

$$(N_+(b) + \gamma I)x_+ = \gamma\, r_\kappa \tag{4.28}$$

*e*

$$(N_+(b) + \gamma I)y_+ = \gamma P_+ b, \tag{4.29}$$

*são solúveis. E, neste caso, as soluções de (4.21) podem ser representadas na forma*

$$\Phi_+ = \begin{pmatrix} \phi_{11}^+ & \phi_{12}^+ \\ P_+(\overline{b}\phi_{11}^+) & \gamma + P_+(\overline{b}\phi_{12}^+) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_- = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} P_-[bP_-(\overline{b}\phi_{11}^+)] & -\gamma P_- b + P_-[bP_-(\overline{b}\phi_{12}^+)] \\ -P_-(\overline{b}\phi_{11}^+) & -P_-(\overline{b}\phi_{12}^+) \end{pmatrix},$$

*onde $\phi_{11}^+$ e $\phi_{12}^+$ são soluções de (4.28) e (4.29), respectivamente e $A_\gamma(b)$ admite a factorização generalizada*

$$A_\gamma(b) = F_+ \Lambda F_-,$$

*onde*

$$F_+ = \Phi_+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} t^\kappa & 0 \\ 0 & t^{-\kappa} \end{pmatrix}, \quad F_- = \Lambda^{-1} F_+^{-1} A_\gamma(b),$$

$$\kappa = \dim \operatorname{Ker}(N_+(b) + \gamma I) \quad e \quad \Delta = \frac{1}{\gamma} \det \Phi_+.$$

Para o último caso, a principal diferença é que $F_+$ aparece dependente da constante $\rho = -\frac{c_-(\infty)}{d_-(\infty)}$ que temos de determinar impondo que $F_+$ seja uma função matricial do tipo $(+)$, para todo o $\Delta$ (isto é, admite um prolongamento analítico na região interior da circunferência unitária).

**Teorema 4.10** ***(Caso 3)***

*Se o problema (4.22) é solúvel, então as equações*

$$(N_+(b) + \gamma I)x_+ = \gamma r_{1,\kappa} \tag{4.30}$$

*e*

$$(N_+(b) + \gamma I)y_+ = \gamma P_+(b r_{2,\kappa}), \tag{4.31}$$

*são solúveis. E, neste caso, as soluções de (4.22) podem ser representadas na forma*

$$\Phi_+ = \begin{pmatrix} \phi_{11}^+ & \phi_{12}^+ \\ P_+(\bar{b}\phi_{11}^+) & \gamma r_{2,\kappa} + P_+(\bar{b}\phi_{12}^+) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_- = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} P_-[bP_-(\bar{b}\phi_{11}^+)] & -\gamma P_-(b r_{2,\kappa}) + P_-[bP_-(\bar{b}\phi_{12}^+)] \\ -P_-(\bar{b}\phi_{11}^+) & -P_-(\bar{b}\phi_{12}^+) \end{pmatrix},$$

*onde $\phi_{11}^+$ e $\phi_{12}^+$ são soluções de (4.30) e (4.31), respectivamente e $A_\gamma(b)$ admite a factorização generalizada*

$$A_\gamma(b) = F_+ \Lambda F_-,$$

*onde*

$$F_+ = \Phi_+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta} & 0 \\ \frac{\rho}{\Delta} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} t^\kappa & 0 \\ 0 & t^{-\kappa} \end{pmatrix}, \quad F_- = \Lambda^{-1} F_+^{-1} A_\gamma(b),$$

$$\kappa = \dim \mathrm{Ker}(N_+(b) + \gamma I) \quad e \quad \Delta = \frac{1}{\gamma} \det \Phi_+.$$

Notemos que, caso $b \in H_{\infty,r}$, as equações não homogéneas que surgem nos Teoremas 4.8, 4.9 ou 4.10 (dependendo do caso em análise) podem ser resolvidas através do algoritmo descrito no Capítulo 3.

Finalmente, notamos que o estudo de problemas de contorno de Riemann da forma

$$\begin{cases} \Psi_+ = A_\gamma^T(b) \left( \Psi_- + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_\kappa \end{pmatrix} \right) \\ \Psi_-(\infty) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \Psi_+ = A_\gamma^T(b) \left( \Psi_- + \begin{pmatrix} r_\kappa & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ \Psi_-(\infty) = 0 \end{cases},$$

ou

$$\begin{cases} \Psi_+ = A_\gamma^T(b) \left( \Psi_- + \begin{pmatrix} r_{1,\kappa} & 0 \\ 0 & r_{2,\kappa} \end{pmatrix} \right) \\ \Psi_-(\infty) = 0 \end{cases},$$

e o uso do operador $N_+(b^*)$ (ou do operador $N_-(b^*)$) permite-nos obter resultados análogos aos anteriores, sobre uma factorização generalizada direita de $A_\gamma(b)$.

## 4.5 Algoritmo de factorização de $A_\gamma(b)$ quando $b \in H_{\infty,r}$

Sabemos que se a função $b \in L_\infty(\mathbb{T})$ admite uma representação da forma $b = b_+ + b_-$, onde $b_+$, $\overline{b_-} \in H_\infty$, então podemos assumir, sem perda de generalidade, que $b$ admite prolongamento analítico na região interior de $\mathbb{T}$.

Se a função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada então, para o caso quando $b \in H_{\infty,r}$, podemos usar o algoritmo descrito no Capítulo 3 para resolver as equações não homogéneas que apareceram nas secções 4.3 e 4.4. Vamos ver agora um algoritmo que nos permite obter uma factorização generalizada de $A_\gamma(b)$, quando $-\gamma \notin \sigma_l(N_+(b))$.

**Passo 1:** *Determinar $\kappa$.*

**Passo 1.1:** Determinar $\mathrm{Ker}(N_+(b) + \gamma I)$ usando o algoritmo descrito no Capítulo 3 para resolver a equação homogénea $(N_+(b)+\gamma I)\varphi_+ = 0$. Ir para o Passo 1.2.

**Passo 1.2:** O valor de $\kappa$ é obtido visto que $\kappa$ é a multiplicidade de $-\gamma$ como um valor próprio do operador $N_+(b)$. Ir para o Passo 1.3.

**Passo 1.3:** Se $\gamma$ é tal que $\kappa = 0$, isto é, $\varphi_+(t) \equiv 0$, então $-\gamma \in \rho(N_+(b))$ e a função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica. Ir para o Passo 2. Caso contrário, a função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada não canónica. Ir para o Passo 3.

**Passo 2:** *Obter uma factorização generalizada canónica.*

**Passo 2.1:** Usar o algoritmo descrito no Capítulo 3 para resolver as equações $(N_+(b)+\gamma I)u_+ = 1$ e $(N_+(b)+\gamma I)v_+ = b$. Uma factorização generalizada canónica de $A_\gamma(b)$ é obtida através de (4.16) e (4.17).

**Passo 3:** *Encontrar as duas equações não homogéneas que precisamos de resolver para obtermos uma factorização generalizada de $A_\gamma(b)$.*

Como $N_+(b)$ é um operador autoadjunto e $\gamma$ é uma constante real $(-\gamma \in \sigma(N_+(b))$, temos que $L_2(\mathbb{T}) = \mathrm{Im}(N_+(b)+\gamma I) \oplus \mathrm{Ker}(N_+(b)+\gamma I)$.

**Passo 3.1:** Se $\langle 1, \varphi_j^+\rangle = 0, \forall\ \varphi_j^+ \in \mathrm{Ker}(N_+(b)+\gamma I)$, então $(N_+(b)+\gamma I)x_+ = \gamma$ é solúvel. Caso contrário, $(N_+(b)+\gamma I)x_+ = \gamma$ não é solúvel. E, neste caso, $\exists\ r_{1,\kappa} : \langle r_{1,\kappa}, \varphi_j^+\rangle = 0,\ \forall\ \varphi_j^+ \in \mathrm{Ker}(N_+(b)+\gamma I)$, isto é, $\exists\ r_{1,\kappa} : (N_+(b)+\gamma I)x_+ = \gamma r_{1,\kappa}$ é solúvel. Ir para o Passo 3.2.

**Passo 3.2:** Se $\langle b, \varphi_j^+\rangle = 0, \forall\ \varphi_j^+ \in \mathrm{Ker}(N_+(b)+\gamma I)$, então $(N_+(b)+\gamma I)y_+ = \gamma b$ é solúvel. Caso contrário, $(N_+(b)+\gamma I)y_+ = \gamma b$ não é solúvel. E, neste caso, $\exists\ r_{2,\kappa} : \langle r_{2,\kappa} b, \varphi_j^+\rangle = 0,\ \forall\ \varphi_j^+ \in \mathrm{Ker}(N_+(b)+\gamma I)$, isto é, $\exists\ r_{2,\kappa} : (N_+(b)+\gamma I)y_+ = \gamma b r_{2,\kappa}$ é solúvel. Ir para o Passo 3.3.

**Passo 3.3:** Resolver as equações não homogéneas solúveis encontradas nos Passos 3.1 e 3.2, usando o algoritmo descrito no Capítulo 3. Ir para o Passo 4.

**Passo 4:** *Obter uma factorização generalizada não canónica.*

**Passo 4.1:** Obter uma factorização generalizada não canónica da função matricial $A_\gamma(b)$ usando (dependendo das equações não homogéneas que resolvemos no Passo 3.3) o Teorema 4.8, o Teorema 4.9 ou o Teorema 4.10.

## 4.6 Exemplos

Nesta secção iremos ver alguns exemplos de factorização de funções matriciais da classe $A_\gamma(b)$.

### 4.6.1 $b \in [H_\infty]_{n,n}$, $bb^* = b^*b = e$

Analisemos a factorabilidade da função matricial $A_\gamma(b)$ quando a função matricial $b$, analítica na região interior de $\mathbb{T}$, é tal que $bb^* = b^*b = e$. Se considerarmos, em particular, o caso quando $b = e$, o operador $N_+(b)$ é o operador nulo e o único valor do espectro é o zero. Assim, para todo $\gamma \neq 0$, $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica trivial,

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-,$$

onde

$$A_\gamma^+ = \begin{pmatrix} e & e \\ e & (\gamma+1)e \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_\gamma^- = E.$$

Seja $b \neq e$. Neste caso,

$$N_+(b) = P_+ - bP_+b^*P_+.$$

Assim,

$$N_+^2(b) = N_+(b).$$

Logo,

$$\sigma_T\left(N_+(b)\right) = \{0, 1\}.$$

Analisemos dois casos distintos (em termos de factorização):

1) Pelo Teorema 4.2, sabemos que se $-\gamma \in \rho\left(N_+(b)\right)$, então a função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica esquerda

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-.$$

Seja $-\gamma \in \rho(N_+(b))$, isto é, $\gamma \neq 0$ e $\gamma \neq -1$.

Utilizando (3.6), (3.7) e o Teorema 4.4 obtemos que

$$A_\gamma^+ = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+\gamma}\left(\gamma e + b^*(0)b\right) & b \\ b^*(0) & (1+\gamma)e \end{pmatrix}$$

e

$$A_\gamma^- = \begin{pmatrix} e & 0 \\ \dfrac{1}{1+\gamma}\left(b^* - b^*(0)\right) & e \end{pmatrix}.$$

2) Analisemos agora o que acontece quando $\gamma = -1$. Neste caso $-\gamma \in \sigma_T(N_+(b))$, podendo pertencer ou não ao espectro limite de $N_+(b)$. Se $-\gamma \in \sigma_l(N_+(b))$, então $A_{-1}(b)$ não admite factorização generalizada em $L_2(\mathbb{T})$. Caso contrário, a função matricial $A_{-1}(b)$ admite uma factorização generalizada não canónica.

Vejamos, em pormenor, o caso quando $n = 1$. Vem que $b$ é uma função interna e

$$\mathrm{Ker}(N_+(b) - I) = \mathrm{Ker}(P_b - I) = H_2 \ominus bH_2$$

(ver (2.3), (2.6) e (2.7)).

Utilizando o Lema 2.2 e o Teorema 2.22, temos que a função matricial $A_{-1}(b)$ admite factorização generalizada não canónica se e só se $b$ é um produto de Blaschke finito. Assim, $b$ é uma função de $R^+(\mathbb{T})$ e $b^{-1} = \overline{b} \in R^-(\mathbb{T})$.

Seja $\varphi_+$ uma função de $H_2 \ominus bH_2$.

Considerando a factorização (2.8) de $b$,

$$b(t) = b_-(t)t^{\mathrm{ind} b}b_+(t),$$

obtemos a factorização da função matricial $A_{-1}(b)$

$$A_{-1}(b) = A_{-1}^+ \Lambda A_{-1}^-,$$

onde

$$A_{-1}^{+} = \begin{pmatrix} -b_{+} & (b-\varphi_{+})\, b_{+}^{-1} \\ 0 & b_{+}^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{\mathrm{ind} b} & 0 \\ 0 & t^{-\mathrm{ind} b} \end{pmatrix}$$

e

$$A_{-1}^{-} = \begin{pmatrix} -\varphi_{+}\overline{b}^{2} b_{-} & -b_{-} \\ b_{-}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

### 4.6.2 $b(t) = b_{-}(t) + \mathrm{diag}\left[\beta_i \, \dfrac{1}{t-a_i}\right], \ b_{-}^{*} \in [H_\infty]_{n,n}$

Utilizemos agora o Teorema 4.6 para, juntamente com a relação (4.15), determinar uma factorização generalizada canónica esquerda (quando esta existe) da função matricial $A_\gamma(b)$, quando a função matricial $b$ admite uma representação na forma

$$b = b_{-} + \mathrm{diag}\left[\beta_i \, \frac{1}{t-a_i}\right],$$

onde

$$b_{-}^{*} \in [H_\infty]_{n,n}, \quad a_i, \ \beta_i \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad |a_i| > 1, \ \forall i = \overline{1,n}.$$

Calculemos, em primeiro lugar, o espectro de $N_{+}(b)$. Sejam

$$\mu_k = \left\| \frac{1}{t-a_k} \right\|_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{|a_k|^2 - 1}} \quad \text{e} \quad \alpha_k = \mu_k \beta_k, \ \forall k = \overline{1,n}.$$

Denotemos por $\varphi_{+}(t)$ um vector $n$-dimensional pertencente a $[L_2(\mathbb{T})]_n$,

$$\varphi_{+}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,+}(t), & \cdots, & \varphi_{n,+}(t) \end{pmatrix}^{T}.$$

Obtemos

$$N_{+}(b)\varphi_{+}(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{|\alpha_1|^2 \varphi_{1,+}\left(\frac{1}{\overline{a_1}}\right)}{\mu_1^2 \overline{a_1}\left(|a_1|^2 - 1\right)} \dfrac{1}{t-a_1}, & \cdots, & -\dfrac{|\alpha_n|^2 \varphi_{1,+}\left(\frac{1}{\overline{a_1}}\right)}{\mu_1^2 \overline{a_n}\left(|a_n|^2 - 1\right)} \dfrac{1}{t-a_n} \end{pmatrix}^{T}.$$

Assim,

$$\sigma\left(N_+(b)\right) = \left\{ \frac{|\alpha_1|^2}{\mu_1^2\left(|a_1|^2-1\right)^2}, \quad \cdots, \quad \frac{|\alpha_n|^2}{\mu_n^2\left(|a_n|^2-1\right)^2} \right\}$$

e

$$\{\nu_k^+\}, \quad \nu_k^+ = \frac{1}{\mu_k}\left( 0, \quad \cdots, \quad 0, \quad \frac{1}{t-a_k}, \quad 0, \quad \cdots, \quad 0 \right)^T,$$

representa um sistema ortonormado em $[L_2(\mathbb{T})]_n$ formado pelas funções próprias do operador $N_+(b)$ associadas aos valores próprios $\lambda_k = \dfrac{|\alpha_k|^2}{\mu_k^2\left(|a_k|^2-1\right)^2}$.

Seja $-\gamma \in \rho\left(N_+(b)\right)$, isto é, $\gamma \neq -\lambda_k, \ \forall k = \overline{1,n}$. Utilizando o Teorema 4.6 obtemos a factorização generalizada canónica da função matricial $A_\gamma(b)$,

$$A_\gamma(b) = A_\gamma^+ A_\gamma^-,$$

onde

$$A_\gamma^+ = \begin{pmatrix} e & 0 \\ b_-^* & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^+ & A_{12}^+ \\ A_{21}^+ & A_{22}^+ \end{pmatrix}$$

e

$$A_\gamma^- = \begin{pmatrix} A_{11}^- & A_{12}^- \\ A_{21}^- & A_{22}^- \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & b_- \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

estando as funções matriciais $A_{ij}^\pm$ definidas da seguinte forma

$$A_{11}^+ = e - \operatorname{diag}\left[\frac{c_{kk}}{\mu_k(t-a_k)}\right]_{k=\overline{1,n}},$$

$$A_{12}^+ = \operatorname{diag}\left[\frac{\gamma\alpha_k}{\mu_k(\lambda_k+\gamma)(t-a_k)}\right]_{k=\overline{1,n}},$$

$$A_{21}^+ = \operatorname{diag}\left[-\frac{\overline{\alpha_k}}{\mu_k\overline{a_k}} + \frac{\overline{\alpha_k}a_k c_{kk}}{\mu_k^2(|a_k|^2-1)(t-a_k)}\right]_{k=\overline{1,n}},$$

$$A_{22}^+ = \gamma e - \operatorname{diag}\left[\frac{\gamma|\alpha_k|^2 a_k}{\mu_k^2(\lambda_k+\gamma)(|a_k|^2-1)(t-a_k)}\right]_{k=\overline{1,n}},$$

$$A_{11}^{-} = e + \operatorname{diag}\left[\left(1 + \frac{c_{kk}\overline{a_k}}{\mu_k(|a_k|^2-1)}\right)\frac{|\alpha_k|^2}{\gamma\mu_k^2\overline{a_k}(|a_k|^2-1)\left(t-\dfrac{1}{\overline{a_k}}\right)}\right]_{k=\overline{1,n}},$$

$$A_{12}^{-} = -\operatorname{diag}\left[\frac{|\alpha_k|^2\alpha_k}{\mu_k^3(|a_k|^2-1)^2(\lambda_k+\gamma)\left(t-\dfrac{1}{\overline{a_k}}\right)}\right]_{k=\overline{1,n}},$$

$$A_{21}^{-} = \operatorname{diag}\left[\left(1 + \frac{c_{kk}\overline{a_k}}{\mu_k(|a_k|^2-1)}\right)\frac{\overline{\alpha_k}}{\gamma\mu_k\overline{a_k}^2\left(t-\dfrac{1}{\overline{a_k}}\right)}\right]_{k=\overline{1,n}}$$

e

$$A_{22}^{-} = e - \operatorname{diag}\left[\frac{|\alpha_k|^2}{\mu_k^2\overline{a_k}(|a_k|^2-1)(\lambda_k+\gamma)\left(t-\dfrac{1}{\overline{a_k}}\right)}\right]_{k=\overline{1,n}},$$

onde

$$c_{kk} = -\frac{\mu_k\lambda_k\left(|a_k|^2-1\right)}{(\lambda_k+\gamma)\overline{a_k}}.$$

Além disso, as funções matriciais $A_{21}^{-}$ e $A_{22}^{-}$ comutam e

$$A_{11}^{-}A_{22}^{-} - A_{12}^{-}A_{21}^{-} = e.$$

Assim, se considerarmos, por exemplo, o caso quando $\beta_k \neq 0, \ \ \forall k = \overline{1,n}$, então $A_{21}^{-}$ é invertível em $\mathbb{T}_-$ e obtemos

$$A_{\gamma}^{-} = \begin{pmatrix} (A_{21}^{-})^{-1}A_{22}^{-}A_{21}^{-} & -(A_{21}^{-})^{-1}(A_{22}^{-}A_{21}^{-}A_{11}^{-}(A_{21}^{-})^{-1}-e) \\ -A_{21}^{-} & A_{21}^{-}A_{11}^{-}(A_{21}^{-})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & b_- \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

### 4.6.3 $b \in H_{\infty,r}$, com $\theta(t) \equiv 1$

Vamos agora analisar em pormenor um exemplo simples, onde $b \in H_{\infty,r}$, com $\theta(t) \equiv 1$, para clarificar as secções 4.4 e 4.5.

Seja $b(t) = t - 2$. Pretendemos factorizar a função matricial

$$A_\gamma(b) = \begin{pmatrix} 1 & t-2 \\ \frac{1}{t} - 2 & 5 - \frac{2}{t} - 2t + \gamma \end{pmatrix},$$

quando esta admite uma factorização não canónica.

Comecemos pelo **Passo 1** do algoritmo da secção 4.5, isto é, vamos determinar $\kappa = \dim \operatorname{Ker}(N_+(b) + \gamma I)$.

**Passo 1.1** Analisemos o núcleo do operador $N_+(b) + \gamma I$ usando o algoritmo descrito no Capítulo 3 para resolver a equação homogénea $(N_+(b) + \gamma I)\varphi_+ = 0$. Como $\theta(t) \equiv 1$ vem que $P_\theta$ é o operador nulo. Assim,

$$t^{-1}\theta(t)x_+(t) \equiv 0,$$

isto é,

$$x_+(t) \equiv 0.$$

Além disso, temos que

$$\psi(t) = \frac{\overline{b(t)}}{\gamma}\left(0 - P_+\left((t-2)\psi_-(t)\right)\right) = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{t} - 2\right)E_1,$$

onde $E_1$ é a constante dada por (3.49). Vem que

$$\psi_-(t) = P_-\left(-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{t} - 2\right)E_1\right) = -\frac{E_1}{\gamma\, t}.$$

Utilizando (3.85) e o facto de que $\overline{f_4(0)} = E_1$ obtemos que

$$E_1(\gamma + 1) = 0.$$

Temos duas situações distintas.

1) Se $\gamma \neq -1$, então $E_1 = 0$. Ou seja, $\psi(t) \equiv 0$. Neste caso o núcleo de $N_+(b) + \gamma I$ é trivial.

**Passo 1.2** $\kappa = 0$.

**Passo 1.3** A função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica.

**Passo 2** Obter uma factorização generalizada canónica de $A_\gamma(b)$.

**Passo 2.1** Usar o algoritmo descrito no Capítulo 3 para resolver as equações $(N_+(b) + \gamma I)u_+ = 1$ e $(N_+(b) + \gamma I)v_+ = b$.

2) Se $\gamma = -1$, então $\varphi_+(t) = -\dfrac{E_1}{\gamma}$ onde $E_1$ é uma constante arbitrária. Isto é,

$$\mathrm{Ker}(N_+(b) - I) = \mathrm{span}\{1\}.$$

**Passo 1.2** $\kappa = 1$.

**Passo 1.3** A função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada não canónica.

**Passo 3** Encontrar as duas equações não homogéneas que precisamos de resolver para obtermos uma factorização generalizada de $A_\gamma(b)$.

$\mathrm{Im}(N_+(b) - I) = L_2(\mathbb{T}) \ominus \mathrm{span}\{1\}$.

**Passo 3.1** Como 1 não pertence a $\mathrm{Im}(N_+(b) - I)$, a equação não homogénea $(N_+(b) - I)x_+ = -1$ não é solúvel. Neste caso,

$$\exists\ r_{1,\kappa} = t + a_0 :\ \langle r_{1,\kappa}, 1\rangle = 0,$$

isto é,

$$\exists\ r_{1,\kappa} = t + a_0 :\ (N_+(b) - I)x_+ = -r_{1,\kappa}$$

é solúvel. Temos que $a_0 = 0$.

**Passo 3.2** Como $\langle b, 1\rangle \neq 0$, isto é, $b$ não pertence a $\mathrm{Im}(N_+(b) - I)$, a equação não homogénea $(N_+(b) - I)y_+ = -b$ não é solúvel. Neste caso,

$$\exists\ r_{2,\kappa} = t + d_0 :\ \langle b\, r_{2,\kappa}, 1\rangle = 0,$$

isto é,

$$\exists\ r_{2,\kappa} = t + d_0 :\ (N_+(b) - I)y_+ = -b\, r_{2,\kappa}$$

é solúvel. Temos que $d_0 = 0$.

**Passo 3.3** Resolver as equações não homogéneas

$$(N_+(b) - I)x_+ = -t \ \text{ e } \ (N_+(b) - I)y_+ = -b\, t.$$

Usando o algoritmo descrito no Capítulo 3 obtemos que

$$x_+(t) = t + E_{1,x_+} \ \text{ e } \ y_+(t) = t(t-2) + E_{1,y_+},$$

onde $E_{1,x_+}$ e $E_{1,y_+}$ são constantes arbitrárias.

**Passo 4** Obter uma factorização generalizada não canónica de $A_{-1}(b)$.

**Passo 4.1:** Estamos perante o caso 3. Assim, utilizando o Teorema 4.10 conseguimos obter uma factorização generalizada não canónica de $A_{-1}(b)$. Analisando o problema

$$\Phi_+(t) = A_\gamma(b)\left(\Phi_-(t) + \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right),$$

obtemos

$$\Phi_+(t) = \begin{pmatrix} t + E_{1,x_+} & t(t-2) + E_{1,y_+} \\ 1 - 2t - 2E_{1,x_+} & 4t - 2t^2 - 2(1 + E_{1,y_+}) \end{pmatrix}$$

e

$$\Phi_-(t) = \begin{pmatrix} 2E_1\, t^{-1} & 2E_1\, t^{-1} \\ E_1\, t^{-1} & E_1\, t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$\Delta(t) = -\det \Phi_+(t) = t^2 + 2E_{1,x_+} + E_{1,y_+}.$$

Seja

$$F_+ = \Phi_+ \begin{pmatrix} \Delta^{-1} & 0 \\ \rho\, \Delta^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$F_+(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{E_{1,x_+} + t + E_{1,y_+}\rho - 2\rho t + t^2\rho}{t^2 + 2E_{1,x_+} + E_{1,y_+}} & E_{1,y_+} - 2t + t^2 \\ \dfrac{1 - 2E_{1,x_+} - 2t - \rho(2 + 2E_{1,y_+} - 4t + 2t^2)}{t^2 + 2E_{1,x_+} + E_{1,y_+}} & 2(2t - 1 - E_{1,y_+} - t^2) \end{pmatrix}.$$

Notamos que $\det F_+ = -1$. Determinamos $\rho = -\dfrac{c_-(\infty)}{d_-(\infty)}$ de forma a que $F_+$ (e a sua inversa) admita um prolongamento analítico na região interior da circunferência unitária. Vem que $\rho = \dfrac{1}{2}$ .

Obtemos a seguinte factorização de $A_{-1}(b)$,

$$A_{-1}(b) = F_+ \Lambda F_-,$$

onde

$$F_+(t) = \begin{pmatrix} 2^{-1} & E_{1,y_+} - 2t + t^2 \\ -1 & 2(-1 - E_{1,y_+} + 2t - t^2) \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

e

$$F_-(t) = \begin{pmatrix} 1 + E_{1,y_+}\, t^{-2} & -2E_{1,y_+}\, t^{-2} \\ -2^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

### 4.6.4 $b(t) = (t-\mu)\theta(t)$

Vamos considerar agora outro caso onde aplicaremos os algoritmos descritos nas secções 3.2 e 4.5.

Seja

$$b(t) = (t-\mu)\theta(t),$$

onde $\mu > 1$ e $\theta(t)$ é uma função interna.

Denotemos por $p_{1,2}$ os zeros de $\gamma + |t-\mu|^2$. Seja $\theta(t)$ uma função definida numa vizinhança de $p_1$ e numa vizinhança de $p_2$.

Usando o algoritmo descrito no Capítulo 3 podemos resolver a equação homogénea

$$(N_+(b) + \gamma I)\varphi_+ = 0.$$

Obtemos que,

*i)* se $\gamma \neq -1$ ou se $\theta(p_1) \neq \theta(p_2)$, então $\varphi_+(t) \equiv 0$

*ii)* se $\gamma = -1$ e $\theta(p_1) = \theta(p_2) = 0$, então $\varphi_+(t) = \dfrac{\overline{\mu}\, t(t-\mu)\theta(t)}{\mu + \overline{\mu}t(t-\mu)}\, E_1$

*iii)* se $\gamma = -1$ e $\theta(p_1) = \theta(p_2) (\neq 0)$, então $\varphi_+(t) = \dfrac{[\mu\theta(p_1) + \overline{\mu}t(t-\mu)\theta(t)]}{\theta(p_1)[\mu + \overline{\mu}t(t-\mu)]} E_1,$

onde $E_1$ é uma constante arbitrária resultante de (3.49).

Para o caso *i)* a função matricial $A_\gamma(b)$ admite uma factorização generalizada canónica. Para os outros casos a função matricial $A_{-1}(b)$ admite uma factorização generalizada não canónica.

Analisemos o caso *iii*) (aplicável, por exemplo, a $\theta(t) = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{7}}\frac{1+t}{1-t}}$). A função $|t-\mu|^2 - 1$ tem um zero com multiplicidade dois ou dois zeros distintos. Então, temos de analisar se o(s) zero(s) pertence(m) a $\mathbb{T}_+$, a $\mathbb{T}_-$ ou a $\mathbb{T}$. Assim, para este exemplo, obtemos diferentes sistemas para resolver, dependendo do valor de $\mu$. Para obtermos resultados numa forma simples, consideraremos um valor concreto de $\mu$.

Vejamos, por exemplo, o caso quando $\mu = \frac{3}{2}$. Temos que $p_1 = \frac{1}{4}(3 - i\sqrt{7})$ e $p_2 = \frac{1}{4}(3 + i\sqrt{7})$. Seguindo o algoritmo da secção 4.5, obtemos que

**Passo 1:**

**Passo 1.1:** $\mathrm{Ker}(N_+(b) - I) = \mathrm{span}\{\dfrac{[2\theta(p_1) + t(-3+2t)\theta(t)]}{\theta(p_1)[2 - 3t + 2t^2)}\}$

**Passo 1.2:** $\kappa = 1$

**Passo 1.3:** $A_{-1}(b)$ admite uma factorização generalizada não canónica

**Passo 3:**

**Passo 3.1:** $(N_+(b) - I)u_+(t) = 1$ não é solúvel

$$(N_+(b) - I)x_+(t) = -[t - \tfrac{3}{2}(1 - \theta(p_1)\overline{\theta(0)})] \text{ é solúvel}$$

**Passo 3.2:** $(N_+(b) - I)v_+(t) = b(t)$ não é solúvel

$$(N_+(b) - I)y_+(t) = -b(t)t \text{ é solúvel}$$

**Passo 3.3:**

$$x_+(t) = \frac{-2t(-3+2t)(\theta(p_1) - \theta(t)) - 3\theta(p_1)t\overline{\theta(0)}\beta(t) + 3E_{1,x_+}\beta(t)}{3\theta(p_1)(2 - 3t + 2t^2)}$$

e

$$y_+(t) = \frac{\theta(p_1)[4E_{1,y_+} + 6t\theta(t) - 13t^2\theta(t) + 12t^3\theta(t) - 4t^4\theta(t)] - 2tE_{1,y_+}\theta(t)(3-2t)}{2\theta(p_1)(2 - 3t + 2t^2)},$$

onde $E_{1,x_+}$ e $E_{1,y_+}$ são constantes arbitrárias e $\beta(t) = 2\theta(p_1) + t(-3+2t)\theta(t)$.

**Passo 4:** Podemos obter uma factorização generalizada não canónica da função matricial $A_{-1}(b)$ usando o Teorema 4.10.

# Capítulo 5

# Operadores integrais de Hankel

Já foi referido que o problema de factorizar explicitamente as funções matriciais tem aplicações em diferentes áreas, tais como a teoria dos operadores integrais singulares, os problemas de valores de fronteira e a teoria de equações diferenciais lineares e não lineares. Neste capítulo iremos obter uma representação dos resolventes de uma classe especial de operadores integrais de Hankel através de uma factorização generalizada canónica de uma classe de funções matriciais, com a ajuda de operadores com propriedades espectrais idênticas às dos operadores considerados para o estudo de $A_\gamma(b)$.

## 5.1 Preliminares. O operador integral de Hankel, $\mathcal{K}$

Neste Capítulo, $L_2(\mathbb{R})$ ($L_2(\mathbb{R}^+)$) denota o espaço de Hilbert formado por todas as funções $\varphi$ mensuráveis em $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^+$) para as quais $|\varphi|^2$ é integrável à

Lebesgue, induzido pela norma

$$\|\varphi\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\|\varphi\|_2 = \left(\int_{0}^{+\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

De agora em diante denotaremos $L_2(\mathbb{R})$ por $L_2$. O espaço $L_2$ pode ser decomposto na soma directa de dois subspaços fechados, $L_2^{\pm}$, formados, respectivamente, pelas funções em $L_2$ cujos suportes estão contidos em $\overline{\mathbb{R}^{\pm}}$, i. e., temos $L_2 = L_2^+ \oplus L_2^-$. Sejam $P^{\pm} = (I \pm S_{\mathbb{R}})/2$ os operadores de projecção de Cauchy associados ao operador integral singular em $\mathbb{R}$, $S_{\mathbb{R}}$.

Consideremos o operador integral de Hankel

$$\mathcal{K} : L_2^+ \longrightarrow L_2^+$$

definido por

$$\mathcal{K}\varphi(t) = \int_{0}^{+\infty} k(t+\tau)\varphi(\tau)d\tau,\ t > 0 \tag{5.1}$$

onde a função núcleo $k$ (nula em $(-\infty, 0)$) é tal que a sua transformada de Fourier,

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t)e^{i\omega t}dt, \omega \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

pertence a $L_\infty$, i.e, é uma função mensurável essencialmente limitada em $\mathbb{R}$.

Pode-se provar que $\mathcal{K}$ é um operador limitado (ver, por exemplo, [31]), para o qual

$$\|\mathcal{K}\| \leq \|K\|_\infty$$

com $\|K\|_\infty = \text{ess sup}_{\omega\in\mathbb{R}}|K(\omega)|$.

Usando a transformação de Fourier $\mathcal{F}$ em $L_2$, o operador de Hankel (5.1) pode ser reescrito na forma

$$\mathcal{K} : L_2^+ \longrightarrow L_2^+,$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{F}^{-1} P^{+} K J \mid_{\mathrm{Im} P^{+}} \mathcal{F},$$

onde $J$ é o operador de reflexão dado por

$$J : L_2 \longrightarrow L_2,$$

$$J\varphi(t) = \varphi(-t) \quad q.t.p.. \tag{5.3}$$

## 5.2 O operador de Wiener-Hopf $T$ associado a $\mathcal{K}$. Invertibilidade

Precisamos de algumas propriedades do operador de reflexão $J$.

1)
$$J^2 = I \tag{5.4}$$

2)
$$JS_{\mathbb{R}} = -S_{\mathbb{R}}J \tag{5.5}$$

4)
$$JP^{-}J = P^{+} \tag{5.6}$$

5)
$$JP^{+}J = P^{-} \tag{5.7}$$

Seja $\psi \in L_\infty$.

6)
$$\psi(t)J = J\left(\psi(-t)I\right) \tag{5.8}$$

7)
$$J(\psi(t)J) = \psi(-t)I \tag{5.9}$$

8)

$$J\left(\psi P^-\right) = (J\psi)\left(P^+ J\right) \tag{5.10}$$

Consideraremos o operador integral $\mathcal{K}_\lambda$,

$$\mathcal{K}_\lambda = \lambda I - \mathcal{K}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{5.11}$$

caracterizando, tanto quanto possível, a sua invertibilidade.

Em [37] foi demonstrado que ao operador de Hankel $\mathcal{K}_\lambda$ podemos associar um operador de Wiener-Hopf $T$ actuando em $[L_2^+]_2$, com presímbolo em $[L_\infty]_{2,2}$, cujas propriedades estão relacionadas com as de $\mathcal{K}_\lambda$, o que tornou possível o uso dos resultados da Teoria de operadores de Wiener-Hopf para investigar $\mathcal{K}_\lambda$.

Analisando a equação em $L_2^+$,

$$\mathcal{K}_\lambda \varphi^+ = f^+,\ f^+ \in L_2^+, \tag{5.12}$$

aplicando a transformação de Fourier a ambos os lados da equação e utilizando o operador de reflexão, obtemos o operador de Wiener-Hopf $T$,

$$T : [L_2^+]_2 \longrightarrow [L_2^+]_2,$$

$$T = \mathcal{F}^{-1} P^+ G|_{\mathrm{Im} P^+} \mathcal{F}, \tag{5.13}$$

com o presímbolo matricial $G$,

$$G = -\lambda^{-1} \begin{pmatrix} -JK & 1 \\ \lambda^2 - KJK & K \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Do Teorema 3.2 de [37], segue que se $T$ é um operador invertível, então o operador $\mathcal{K}_\lambda$ também o é.

Como $T$ é um operador de Wiener-Hopf em $[L_2^+]_2$ com presímbolo $G$ em $[L_\infty]_{2\times 2}$, $T$ é um operador de Fredholm invertível se e só se $G$ admite uma factorização generalizada canónica com respeito a $L_2$ (ver, por exemplo, [4]).

Foi provado em [37] que uma factorização generalizada canónica direita da função matricial $G$,

$$G = G_- G_+, \tag{5.15}$$

fornece uma expressão para o inverso de $\mathcal{K}_\lambda$.

Vamos assumir $\lambda$ fixo. Se $G$ admite uma factorização generalizada canónica (5.15), então o operador $T$ é invertível podendo o operador inverso ser representado pela expressão

$$T^{-1} = \mathcal{F}^{-1} G_+^{-1} P^+ G_-^{-1}|_{\mathrm{Im} P^+} \mathcal{F}.$$

Neste caso, o operador $\mathcal{K}_\lambda$ é também um operador invertível, isto é,

$$\forall f^+ \in L_2^+,$$

a equação (5.12) tem a solução única $\varphi^+$,

$$\varphi^+ = \hat{\Pi} T^{-1} \check{\Pi} f^+,$$

onde

$$\hat{\Pi} : [L_2]_2 \longrightarrow L_2, \qquad \hat{\Pi} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \varphi_1$$

e

$$\check{\Pi} : L_2^+ \longrightarrow [L_2^+]_2, \qquad \check{\Pi} f^+ = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{K}_{-\lambda} f^+ \end{pmatrix}.$$

Assim, o inverso do operador $\mathcal{K}_\lambda$ é obtido através do operador inverso de $T$ ([37], Teorema 3.3):

**Teorema 5.1** *Seja $T$ o operador de Wiener-Hopf associado a $\mathcal{K}_\lambda$, como em (5.13). Se o operador $T$ é invertível então $\mathcal{K}_\lambda$ é invertível, com inverso dado por*

$$\mathcal{K}_\lambda^{-1} = \hat{\Pi} T^{-1} \check{\Pi}.$$

## 5.3 Representação explícita do resolvente do operador integral de Hankel $\mathcal{K}$

Vamos de seguida ver em que circunstâncias a função matricial $G$ admite uma factorização generalizada canónica direita (5.15) e como a podemos obter (caso exista). Nos casos em que seja possível factorizar explicitamente a função matricial $G$, obtemos o operador resolvente do operador integral de Hankel $\mathcal{K}$ numa forma explícita.

A função matricial $G$ pode ser representada na forma

$$G = -\lambda^{-1} B_\lambda^T(K) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

onde

$$B_\lambda(K) = \begin{pmatrix} 1 & K \\ -JK & \lambda^2 - KJK \end{pmatrix}, \tag{5.17}$$

e $B_\lambda^T(K)$ é a sua função matricial transposta. Se $B_\lambda(K)$ admite uma factorização generalizada canónica,

$$B_\lambda(K) = B_\lambda^+ B_\lambda^-,$$

então podemos facilmente obter uma factorização generalizada canónica (5.15), da função matricial $G$, onde os factores $G_-$ e $G_+$ são dados por

$$G_- = (B_\lambda^-)^T$$

e

$$G_+ = -\lambda^{-1}(B_\lambda^+)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos notar que a função matricial $B_\lambda(K)$ tem uma estrutura similar à da função matricial $A_\gamma(b)$.

Vamos introduzir os operadores

$$N^+(K) = -P^+KP^-(JK)P^+$$

e

$$N^-(K) = -P^-(JK)P^+KP^-.$$

Utilizando algumas propriedades do operador $J$, obtemos que

$$J\left(N^\pm(K) + \lambda^2 I\right)J = N^\mp(K) + \lambda^2 I.$$

Assim,

$$\rho(N^+(K)) = \rho(N^-(K)).$$

Consideremos $-\lambda^2 \in \rho(N^+(K))$. Neste caso, as equações

$$\left(N^+(K) + \lambda^2 I\right)u_+ = 1$$

e

$$\left(N^+(K) + \lambda^2 I\right)v_+ = P^+K$$

são solúveis e temos

$$u_+ = \left(N^+(K) + \lambda^2 I\right)^{-1} 1$$

e

$$v_+ = \left(N^+(K) + \lambda^2 I\right)^{-1}(P^+K).$$

Estamos em condições de, utilizando um raciocínio semelhante ao usado para os Teoremas 4.2 e 4.4, determinar uma factorização da função matricial $B_\lambda(K)$, seguindo um método similar ao utilizado para o estudo de matrizes do tipo $A_\gamma(b)$.

**Teorema 5.2** *A função matricial $B_\lambda(K)$ admite uma factorização generalizada canónica se e só se $-\lambda^2 \in \rho(N^+(K))$. E, neste caso,*

$$B_\lambda(K) = B_\lambda^+ B_\lambda^-,$$

*onde*

$$B_\lambda^+ = \lambda^2 \begin{pmatrix} u_+ & v_+ \\ -P^+[(JK)u_+] & 1 - P^+[(JK)v_+] \end{pmatrix}$$

*e*

$$B_\lambda^- = \begin{pmatrix} 1 + P^-[(JK)v_+] & P^-K + P^-\{KP^-[(JK)v_+]\} \\ -P^-[(JK)u_+] & 1 - P^-\{KP^-[(JK)u_+]\} \end{pmatrix}.$$

Assim, se $-\lambda^2 \in \rho(N^+(K))$, podemos obter uma factorização generalizada canónica (5.15) da função matricial $G$, onde os factores $G_+$ e $G_-$ são dados por

$$G_+ = -\lambda \begin{pmatrix} -P^+[(JK)u_+] & u_+ \\ 1 - P^+[(JK)v_+] & v_+ \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

e

$$G_- = \begin{pmatrix} 1 + P^-[(JK)v_+] & -P^-[(JK)u_+] \\ P^-K + P^-\{KP^-[(JK)v_+]\} & 1 - P^-\{KP^-[(JK)u_+]\} \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Em particular, se $K \in L_\infty$ é uma função que possa ser representada na forma

$$K = K_+ + K_-,$$

onde $K_+ = P^+K$ e $K_- = P^-K$, então uma factorização generalizada canónica esquerda da função matricial $G$ não depende de $K_-$. De facto, temos que

$$B_\lambda(K) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -JK_- & 1 \end{pmatrix} B_\lambda(K_+) \begin{pmatrix} 1 & K_- \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 5.3** *Seja $\mathcal{K}$ o operador integral de Hankel definido por (5.1). Se $-\lambda^2 \in \rho(N^+(K))$, então*

$$\mathcal{K}_\lambda = \lambda I - \mathcal{K}$$

*é um operador invertível, com inverso dado por*

$$\mathcal{K}_\lambda^{-1} = \hat{\Pi}\mathcal{F}^{-1}G_+^{-1}P^+G_-^{-1}|_{\mathrm{Im}P^+}\mathcal{F}\check{\Pi},$$

*onde $G_+$ e $G_-$ são as funções matriciais dadas por (5.18) e (5.19), respectivamente.*

# Bibliografia

[1] Aktosun, T., Klaus, M. e van der Mee, C.. Explicit Wiener-Hopf factorization for certain non-rational matrix functions. *Integral Equations and Operator Theory*, Vol. 15, p. 879-900. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[2] Bart, H., Gohberg, I. e Kaashoek, M.A.. *Minimal Factorization of Matrix and Operator Functions*. Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 1. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 1979.

[3] Câmara, M. C., dos Santos, A. F. e Carpentier, M.. Explicit Wiener-Hopf factorisation and non-linear Riemann-Hilbert problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, 132, p. 45-74, 2002.

[4] Clancey, K. e Gohberg, I.. *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators*. Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 3. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 1981.

[5] Conceição, A. C.. *Factorização de algumas funções matriciais e o resolvente de certos operadores*. Tese de Mestrado. Instituto Superior Tecnico, 1999.

[6] Conceição, A. C. e Kravchenko, V. G.. Factorization algorithm for some special matrix functions. Aceite para publicação em Operator Algebras,

Operator Theory and Applications. *Operator Theory: Advances and Applications*, Vol. 181. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[7] Conceição, A. C. e Kravchenko, V. G.. About explicit factorization of some classes of non-rational matrix functions. Vol. 280, No. 9-10, p. 1022-1034. Mathematische Nachrichten, 2007.

[8] Conceição, A. C., Kravchenko, V. G. e Teixeira F. S.. Factorization of some classes of matrix functions and the resolvent of a Hankel operator. *Factorization, Singular Operators and Related Problems*, p. 101-110. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[9] Conceição, A. C., Kravchenko, V. G. e Teixeira F. S.. Factorization of matrix functions and the resolvents of certain operators. *Operator Theory: Advances and Applications*, Vol. 142, p. 91-100. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[10] Duduchava, R.. *Integral equations with fixed singularities.* Teubner-Texte zur Mathematik, Teubner,Leipzig, 1979.

[11] Ehrhardt, T. e Speck, F.-O.. Transformation techniques towards the factorization of non-rational $2 \times 2$ matrix functions *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 353, p. 53-90, 2002.

[12] Faddeev, L. D. e Takhtayan, L. A. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[13] Feldman, I. , Gohberg, I. e Krupnik, N. An Explicit Factorization Algorithm *Integral Equations and Operator Theory*, Vol. 49, p. 149-164. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[14] Garnett, J. B.. *Bounded Analytic Functions.* Academic Press, New York, 1981.

[15] Gohberg, I. e Krupnik, N.. *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, Vol. I.* Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 53. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[16] Gohberg, I. e Krupnik, N.. *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, Vol. II.* Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 54. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[17] Halmos, P. R.. *A Hilbert Space Problem Book.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[18] Hoffman, K. *Banach Spaces of Analytic Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1988.

[19] Karapetiants, N. e Samko, S.. *Equations with Involutive Operators.* Birkhäuser, Boston, 2001.

[20] Kravchenko, V. G. e Litvinchuk, G. S.. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift.* Mathematics and its Applications, Vol. 289. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[21] Kravchenko, V. G., Marreiros, R. C. e Rodriguez, J. S.. On an estimate for the number of solutions of the generalized Riemann boundary value problem with shift. *Differential and Difference Equations and Applications*, p. 605-615, Hindawi Publishing Corporation, 2006.

[22] Kravchenko, V. G. e Migdal'skii, A. I.. A regularization algorithm for some boundary-value problems of linear conjugation. Vol. 52, p.319-321, Dokl. Math., 1995.

[23] Kravchenko, V. G. e Nikolaichuk, A. M.. On partial indices of the Riemann problem for two pair of functions. Vol. 215, p.53-56, Dokl. Akad. Nauk., 1974.

[24] Krupnik, N.. *Banach Algebras with Symbol and Singular Integral Operators.* Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 26. Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.

[25] Lebre, A. B.. *Álgebras de Operadores Integrais Singulares.* AEIST, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1996.

[26] Lebre, A. B., Moura Santos, A. e Speck, F.-O.. Factorization of a Class of Matrices Generated by Sommerfeld Diffraction Problems with Oblique Derivatives *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 20, p. 1185-1198. B. G. Teubner Stuttgart-John Wiley & Sons Ltd., 1997.

[27] Lebre, A. B. e Teixeira, F. S.. *Apontamentos de Análise Funcional I.* AEIST, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1995.

[28] Litvinchuk, G. S.. *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift.* Mathematics and its Applications, Vol. 523. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[29] Litvinchuk, G. S. e Spitkovskii, I. M.. *Factorization of Measurable Matrix Functions.* Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 25. Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.

[30] Muskhelishvili, N. I. *Singular Integral Equations.* Dover Publications, New York, 1992.

[31] Nikol'skiĭ, N. K.. *Operators, Functions and Systems: An Easy Reading, Vol. I.* Math. Surv. and Mon., Vol. 92. American Mathematical Society, 2002.

[32] Nikol'skiĭ, N. K.. *Operators, Functions and Systems: An Easy Reading, Vol. II.* Math. Surv. and Mon., Vol. 93. American Mathematical Society, 2002.

[33] Nikol'skiĭ, N. K.. *Treatise on the Shift Operator. Spectral Function Theory.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 273. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[34] Prössdorf, S.. *Some Classes of Singular Equations.* North-Holland Mathematical Library, Vol. 17. Akademie-Verlag, Berlin, 1978.

[35] Rosenblum, M. and Rovnyak, J.. *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[36] Sakhnovich, L. A.. *Integral Equations with Difference Kernels on Finite Intervals.* Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 84. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

[37] Teixeira, F. S.. On a Class of Hankel Operators: Fredholm Properties and Invertibility. *Integral Equations and Operator Theory*, Vol. 12, Birkhäuser Verlag, Basel, 1989.

# Lista de Símbolos