

# APLICAÇÃO DE ALGORITMOS GENÉTICOS NA OPTIMIZAÇÃO DE SECÇÕES DE VIGAS DE BETÃO ARMADO



**J.M.C. ESTÊVÃO**  
Eq. Prof. Adjunto  
EST - UAlg  
Faro



**MÁRIO JESUS**  
Eq. Prof. Adjunto  
EST - UAlg  
Faro

## SUMÁRIO

A generalidade dos problemas de ordem prática no domínio do dimensionamento das estruturas incluem variáveis discretas. Os métodos matemáticos tradicionais apresentam dificuldades na procura dos óptimos globais em problemas não lineares discretos. Os algoritmos genéticos constituem uma heurística eficaz na optimização de sistemas estruturais que envolvem variáveis discretas e contínuas. No presente trabalho, descreve-se uma metodologia que visa a optimização da forma geométrica da secção, do dimensionamento e colocação das armaduras em vigas de betão armado, com recurso a algoritmos genéticos. Apresenta-se um exemplo de aplicação da metodologia proposta.

## 1. INTRODUÇÃO

As últimas décadas têm evidenciado uma grande evolução nos equipamentos informáticos, que tem sido acompanhada pela evolução dos programas de cálculo automático de estruturas. Cada vez mais se pretende não só uma solução viável, mas a melhor solução, quer em termos económicos, quer do ponto de vista estrutural.

A generalidade dos processos matemáticos de optimização estão mais vocacionados para lidar com variáveis contínuas e envolvem o conhecimento de gradientes de funções. A maior parte dos problemas de cariz prático, na área da engenharia civil, são problemas não lineares de grande complexidade, envolvendo soluções discretas e contínuas que satisfaçam os requisitos específicos da prática construtiva e os valores limites regulamentares. Nos últimos anos, vários

estudos demonstraram as potencialidades dos algoritmos genéticos na otimização estrutural [1, 2], com variáveis discretas e contínuas, dada a robustez computacional e simplicidade de programação que apresentam, em contraste com os métodos matemáticos tradicionais, na pesquisa dos ótimos globais de problemas não lineares.

É neste contexto que se propõe uma abordagem ao problema da otimização de secções de vigas de betão armado com recurso a algoritmos genéticos.

No artigo faz-se a caracterização sumária de um algoritmo genético, descreve-se a formulação e representação do problema proposto, validando a sua eficácia com a aplicação da metodologia a um caso de estudo. Por fim, apresentam-se as conclusões que se podem retirar do trabalho realizado.

## 2. ASPECTOS GERAIS DOS ALGORITMOS GENÉTICOS

Os algoritmos genéticos são uma heurística de otimização de espectro global, integrada num cada vez mais vasto grupo de técnicas reconhecidas como Sistemas Evolucionários [3].

Os algoritmos genéticos constituem um processo computacional iterativo que tenta recriar os processos naturais de sobrevivência das espécies, seguindo de perto as noções de Darwin [4, 5, 6]. Os algoritmos genéticos usam operadores probabilísticos sobre uma população de indivíduos, na procura do ótimo global, como se apresenta na Figura 1. Cada indivíduo está associado a um genoma (conjunto de genes) e representa uma solução do problema.

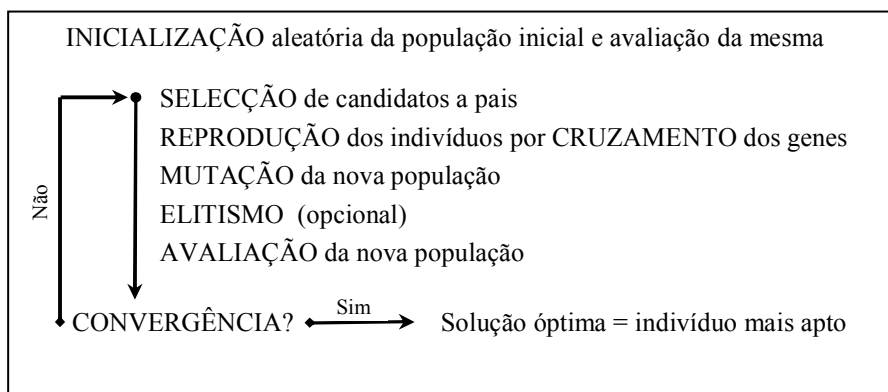


Figura 1: Esquema de funcionamento de um algoritmo genético tradicional

O desempenho de cada indivíduo depende do valor da função de aptidão (*fitness*), que está associada ao valor da função objectivo do problema. Normalmente, realiza-se o mapeamento da função objectivo para a função de aptidão, dado que nem sempre os valores da função objectivo são adequados para garantir a determinação do ótimo global, pois podem conduzir a uma convergência prematura.

Para ter em conta as restrições do problema, a função objectivo é penalizada quando alguma restrição não é verificada, pelo que os indivíduos inviáveis (soluções não admissíveis) têm pequena probabilidade de sobrevivência.

As formas mais comuns para a realização do processo de selecção de candidatos a progenitores são o método da roleta e o método do torneio. No método da roleta, o indivíduo está representado na roleta em proporção ao valor da sua aptidão. Os futuros pais são seleccionados aleatoriamente a partir da roleta (os mais aptos apresentam maiores probabilidades de propagarem os seus genes na população, através da reprodução). Na selecção pelo método do torneio são escolhidos, aleatoriamente, dois (ou mais) indivíduos da população, sendo a aptidão comparada. Os mais aptos são seleccionados para a reprodução.

Na reprodução, o algoritmo tenta gerar melhores soluções para o problema. Os progenitores seleccionados vão originar uma nova população de indivíduos, obtidos por cruzamento dos seus genes, com uma probabilidade de cruzamento definida à partida. Existem diversas formas de cruzamento. O cruzamento por um ponto, dois pontos e uniforme, são as formas mais vulgares (Figura 2).

Um ponto								
Pai 1	0	1	1	1	0	0	1	0
Pai 2	1	1	0	0	1	0	0	1
Filho 1	0	1	1	0	1	0	0	1
Filho 2	1	1	0	1	0	0	1	0

Dois pontos								
Pai 1	0	1	1	1	0	0	1	0
Pai 2	1	1	0	0	1	0	0	1
Filho 1	1	1	1	1	0	0	0	1
Filho 2	0	1	0	0	1	0	1	0

Uniforme								
Mask	1	0	0	1	1	0	1	0
Pai 1	0	1	1	1	0	0	1	0
Pai 2	1	1	0	0	1	0	0	1
Filho 1	0	1	0	1	0	0	1	1
Filho 2	1	1	1	0	1	0	0	0

Figura 2: Exemplos de tipos de cruzamento

A mutação é um operador genético que garante a diversidade genética, permitindo contornar óptimos locais (o que minimiza a convergência prematura). A mutação é realizada com baixa probabilidade, alterando, aleatoriamente, o valor do gene em causa.

O elitismo nem sempre é utilizado nos algoritmos genéticos e é usado na tentativa da melhoria da eficiência do processo de convergência. Esta estratégia reside na transferência do indivíduo mais apto para a geração seguinte.

Existem diversos critérios de convergência dos algoritmos genéticos, sendo a escolha de um deles condicionada pelas características do problema em análise. Os critérios mais comuns de paragem do algoritmo são: quando se atinge uma determinada percentagem da população com aptidão igual ao valor máximo dessa população; se não ocorrer melhoria na aptidão do

indivíduo de melhor desempenho durante um determinado número de iterações; quando se atinge um número estabelecido de iterações.

### 3. FORMULAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

O problema em estudo corresponde à otimização da forma de uma secção rectangular, e pormenorização das armaduras, de uma viga de betão armado, para uma determinada envolvente de esforços  $M_{Sd}^+$ ,  $M_{Sd}^-$  e  $V_{Sd}$  (Figura 3), de modo a minimizar os custos, garantindo a verificação da segurança em relação aos estados limites últimos de resistência (flexão simples e esforço transversal), assim como as disposições construtivas definidas na regulamentação nacional [7].

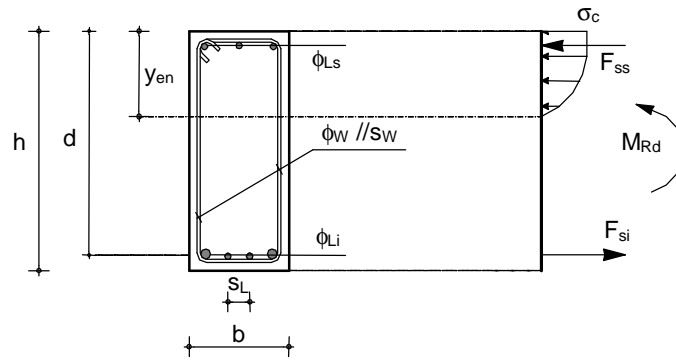


Figura 3: Secção de betão armado de largura “b” e altura “h” a otimizar.

#### 3.1 Formulação

A função objectivo do problema consiste na minimização do custo dos materiais e execução, por unidade de comprimento, de uma viga:

$$\text{minimizar F.O.} = C_B \cdot b \cdot h + C_c \cdot (b + 2 \cdot h) + \sum_{j=1}^n (C_{\phi_{Lj}} \cdot P_{\phi_{Lj}}) + C_{\phi_w} \cdot P_{\phi_w} \quad (1)$$

sujeito a:

$$b_{min} \leq b \leq b_{max}$$

$$h_{min} \leq h \leq h_{max}$$

*Restrições à colocação das armaduras longitudinais da face inferior*

*Restrições à colocação das armaduras longitudinais da face superior*

*Restrições à colocação dos estribos*

$$\text{maior } \phi_L - \text{menor } \phi_L \leq \Delta \phi_{Lim} \quad (2)$$

sendo  $C_B$ ,  $C_C$  e  $C_\phi$ , respectivamente, os custos por unidade de volume de betão, por unidade de área de cofragem e por quilograma de aço de diâmetro  $\phi$ , com peso  $P_\phi$  (por unidade de comprimento de viga).

Restrições à colocação das armaduras longitudinais (para a face inferior e superior):

$$\begin{aligned}
 M_{Rd} &\geq M_{Sd} \\
 \phi_{Lmin} &\leq \phi_L \leq \phi_{Lmax} \\
 s_{Lmin} &\leq s_L \leq s_{Lmax} \\
 A_{sLmin} &\leq A_{sL} \leq A_{sLmax} \\
 y_{en} &\leq k_{max} \cdot d
 \end{aligned} \tag{3}$$

Restrições à colocação dos estribos:

$$\begin{aligned}
 V_{Rd} &\geq V_{Sd} \\
 V_{Rd} &\leq V_{Rd,max} \\
 \phi_{Wmin} &\leq \phi_W \leq \phi_{Wmax} \\
 s_{Wmin} &\leq s_W \leq s_{Wmax} \\
 \left( \frac{A_{sW}}{s_W} \right)_{min} &\leq \frac{A_{sW}}{s_W}
 \end{aligned} \tag{4}$$

O cálculo de  $M_{Rd}$  foi automatizado e realizado de acordo com a regulamentação nacional [7], após resolução numérica do sistema não linear (com resolução analítica dos integrais):

$$\begin{cases} 0 = F_{c(\varepsilon,\chi)} + F_{s(\varepsilon,\chi)} \\ M_{Rd} = M_{c(\varepsilon,\chi)} + M_{s(\varepsilon,\chi)} \end{cases} \tag{5}$$

$$F_{c(\varepsilon,\chi)} = \int_{y^l}^{y^2} \sigma_{c(\varepsilon)} \cdot b \, dy \quad ; \quad M_{c(\varepsilon,\chi)} = \int_{y^l}^{y^2} y \cdot \sigma_{c(\varepsilon)} \cdot b \, dy \tag{6}$$

$$F_{s(\varepsilon,\chi)} = \sum_{j=1}^n (f_{yj(\varepsilon_j)} \cdot A_{sj}) \quad ; \quad M_{s(\varepsilon,\chi)} = \sum_{j=1}^n (y_j \cdot f_{yj(\varepsilon_j)} \cdot A_{sj}) \tag{7}$$

em que  $\varepsilon$  e  $\chi$  designam a extensão e a curvatura da secção.

### 3.2 Representação

Nos problemas práticos de dimensionamento de estruturas é importante que o projectista tenha algum controlo sobre as características da solução final. Nesse contexto, foram definidos

quatro vectores de soluções possíveis (a definir pelo utilizador) respeitantes às dimensões da secção, armaduras longitudinais e estribos (os limites escolhidos para os vectores tiveram como base as pormenorizações correntemente adoptadas em vigas). Atendendo às características do problema, assim definido, foi adoptada a representação binária para cada genoma, que é constituído por uma associação de cinco variáveis ( $i_b$ ,  $i_h$ ,  $i_{\phi Li}$ ,  $i_{\phi Ls}$  e  $i_{\phi W}$ ) correspondentes ao índice dos referidos vectores (Figura 4).

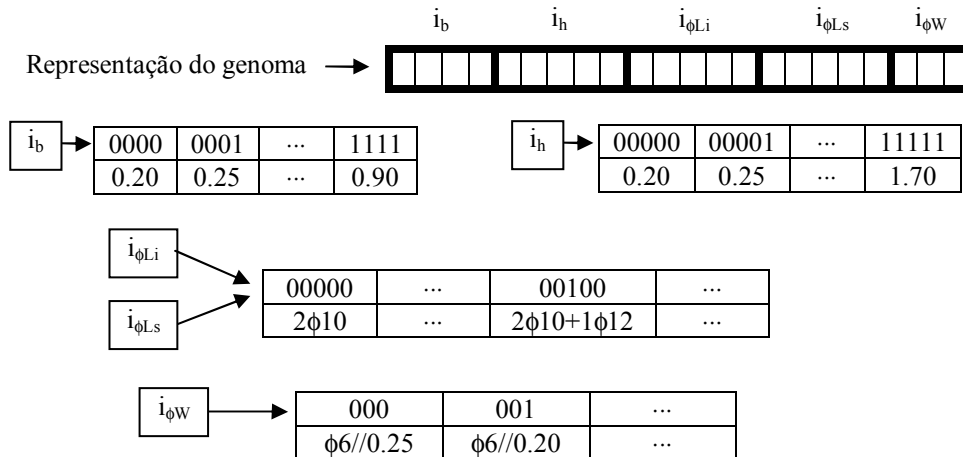


Figura 4: Características da representação adoptada para o problema.

O algoritmo genético adoptado, enquadra-se no esquema apresentado na Figura 1. Foi utilizado o método da roleta como processo de selecção, reprodução com cruzamento em dois pontos, mapeamento da função objectivo por *ranking* (nº da posição da lista ordenada dos valores da função objectivo) e com elitismo.

#### 4. IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

A metodologia proposta, para a optimização de secções de vigas de betão armado, foi implementada num programa de cálculo automático.

Realizou-se um conjunto de testes para avaliar o grau de convergência do algoritmo. Este nem sempre convergiu para o óptimo global, resultando, algumas vezes, numa solução na vizinhança do óptimo.

Nos testes realizados, além dos limites regulamentares, foram adoptados os valores limites que constam na tabela 1, para simular as preferências do projectista. De uma forma aleatória, foram escolhidos os seguintes valores de cálculo:  $M_{Sd}^+ = 90$  kNm,  $M_{Sd}^- = -50$  kNm e  $V_{Sd} = 50$  kN. Foram adoptados  $k_{max} = y_{en}/d = 0.15$  e  $\Delta\phi_{Lim} = 2$  diâmetros.

Consideraram-se valores correntes de custos dos materiais e mão-de-obra, resultantes de uma consulta a uma empresa do sector da construção civil (betão C20/25 e aço A400NR).

Tabela 1 – Valores limites adoptados no problema de teste.

	b (m)	h (m)	$\phi_L$	$\phi_W$
Mínimo	0.25	0.30	$\phi 10$	$\phi 6$
Máximo	0.60	1.20	$\phi 25$	$\phi 10$

Realizaram-se 20 corridas (Figuras 5 e 6) do programa de cálculo (com probabilidades de cruzamento de 70% e de mutação de 0.5%) com populações de 100 e 200 indivíduos. Os resultados situaram-se entre 42.248 €/m (0.25×0.50, 3 $\phi 16$  de armadura inferior, 3 $\phi 16$  de armadura superior e estribos de  $\phi 6//0.20$ ) e 44.476 €/m (0.25×0.60, 2 $\phi 16$ +1 $\phi 12$  A.inf., 2 $\phi 10$ +1 $\phi 12$  A.sup e est.  $\phi 8//0.30$ ) para 100 indivíduos (média de 43.421 €/m e desvio padrão de 0.783), e entre 42.248 €/m e 43.665 €/m (0.25×0.55, 3 $\phi 16$  A.inf., 4 $\phi 12$  A.sup e est.  $\phi 6//0.20$ ) para 200 indivíduos (média de 42.479 €/m e desvio padrão de 0.415).

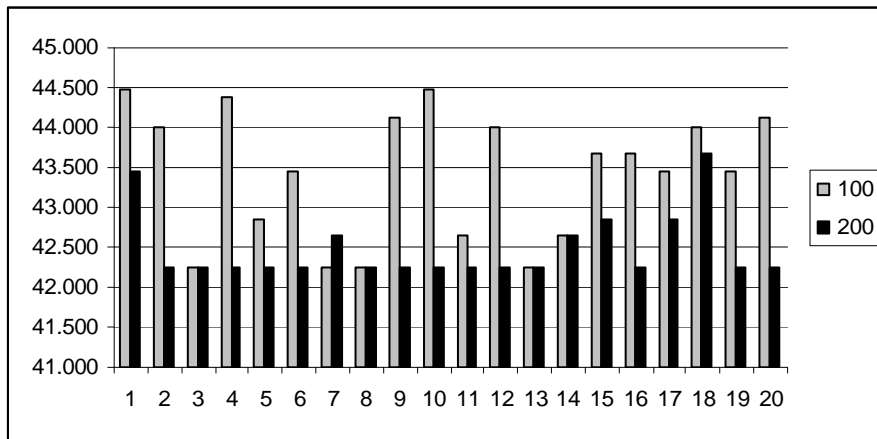


Figura 5: Resultados das corridas com populações de 100 e 200 indivíduos.

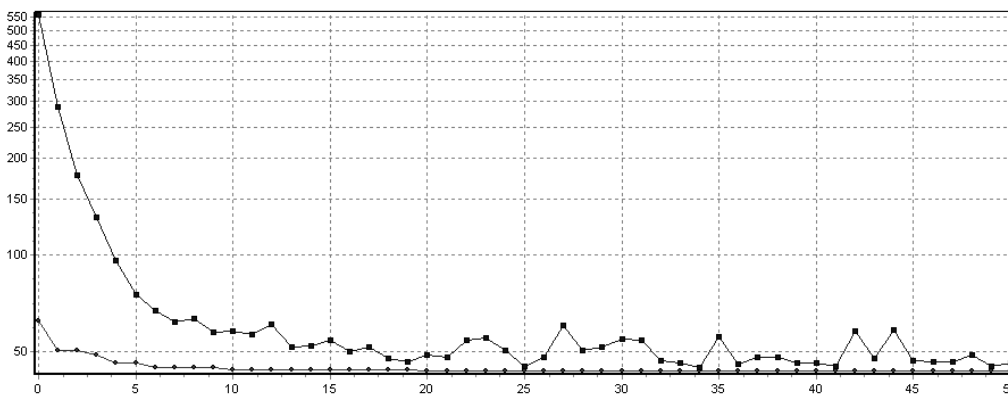


Figura 6: Evolução iterativa típica dos valores médio e mínimo da função objectivo.

## 5. CONCLUSÕES

Dado a inexistência de restrições envolvendo directamente a segurança em relação aos estados limites de utilização, a função objectivo, em que os custos do betão e cofragem têm maior peso, tende a condicionar a solução óptima do problema às dimensões mínimas impostas para a viga. Basicamente, são as restrições em relação à posição do eixo neutro que impõem maiores dimensões para a secção.

O algoritmo converge rapidamente para a vizinhança do óptimo. No entanto, tem algumas dificuldades em atingir o óptimo pelo facto de pequenas alterações nas armaduras não apresentarem diferenças significativas no valor da função objectivo (custo) do problema. É de referir que, no exemplo estudado, existiam 3128055 soluções possíveis (admissíveis e não admissíveis), tendo o algoritmo chegado ao óptimo explorando entre 2000 (10 iterações) e 6000 soluções (30 iterações), no caso da população de 200 indivíduos.

Tendo em conta os objectivos práticos dos problemas no domínio da engenharia civil, pode-se concluir que o método proposto conduz a resultados satisfatórios. É de notar a importância da dimensão da população inicial na variabilidade dos resultados.

Em trabalhos futuros será necessário melhorar a representação de forma a adequar o algoritmo a problemas que envolvam a optimização de sistemas estruturais de edifícios.

## 6. REFERÊNCIAS

- [1] Jenkins, W. M. – “On the application of natural algorithms to structural design optimization”, *Engineering Structures*, 1997, Vol. 19. No. 4, p. 302-308.
- [2] Pezeshk, S. ; Camp, C.V. – “State of the art on the use of genetic algorithms in design of steel structures” em *Recent Advances in Optimal Structural Design*. Ed. por Scott Burns, ASCE, 2002.
- [3] Parmee, I.C. – *Evolutionary and Adaptive Computing in Engineering Design*. Springer-Verlag, 2001.
- [4] Goldberg, D.E. – *Genetic Algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley, 1989.
- [5] Michalewicz, Z. – *Genetic Algorithms + Data structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag, 1994.
- [6] Michell, M. – *Introduction to Genetic Algorithms*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1996.
- [7] Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado. Dec.-Lei nº 349-C/83, de 30 de Julho. Imprensa Nacional - Casa da Moeda, 1983.