

LICENCIATURA em ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS II**

Apontamentos para as Aulas Teóricas

**MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS**

(Setembro 2021)

Vítor Barreto

## ÍNDICE

### MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

#### 1.- Esforços Independentes e Dependentes

##### 2.1- Discretização de uma estrutura

##### 2.2- Deslocamentos e Descontinuidades

##### 2.3- Equilíbrio do Elemento Barra

###### 2.3.1- Elemento Base

###### 2.3.2- Cálculo da matriz de rigidez de um elemento encastrado-encastrado

###### 2.3.3- Libertação Interna

###### 2.3.4- Libertações Exteriores

###### 2.3.5- Matrizes de rigidez de variados elementos base

2.3.5.1- Matrizes de rigidez do elemento encastrado com libertação de esforço transversal à direita

###### 2.3.5.2- Matrizes de rigidez do elemento encastrado rotulado

2.3.5.3- Matrizes de rigidez do elemento encastrado - encastrado com deformação por esforço transversal

2.3.5.4- Matrizes de rigidez do elemento encastrado - encastrado com troços rígidos deformação por esforço transversal

###### 2.3.5.5- Tabelas de coeficientes de rigidez

##### 2.4- Indeterminação Cinemática

###### 2.4.1- Grau de Indeterminação Cinemática de um Corpo Rígido.

###### 2.4.2- Grau de Indeterminação Cinemática de uma Estrutura.

#### 2.5 - Modos de Deformação

#### 3 - Método dos Deslocamentos

##### 3.1- Fundamentação do Método dos Deslocamentos

##### 3.2- Equação de equilíbrio do Método dos Deslocamentos

###### 3.2.1- Propriedades da Matriz de Rigidez

###### 3.2.3- Cálculo de Esforços, Reações de Apoio e de Deslocamentos Dependentes

###### 3.2.4- Cálculo de Esforços

###### 3.2.5 - Cálculo de Reações de Apoio

###### 3.2.6 - Cálculo de Deslocamentos Dependentes

##### 3.3 - Procedimento prático para o cálculo manual.

##### 3.4 - Assentamentos de Apoio

3.4.1 – Assentamento de apoio tratado como grau de liberdade adicional de valor conhecido.

###### 3.4.2 – Assentamento de apoio tratado como ação exterior.

3.4.2.1 - Caso 1- Assentamento de apoio em estrutura com barras Axialmente Deformáveis

3.4.2.2 - Caso 2- Assentamento de apoio em estrutura com barras Axialmente Indeforáveis

### 3.5 - Variação de Temperatura

#### 3.5.1 - Cálculo dos esforços de fixação devidos a $\Delta T$

3.5.1.1 - Caso 1- Cálculo dos esforços de fixação devidos a  $\Delta T$  numa estrutura com Barras Axialmente **Deformáveis**

3.5.1.2 - Caso 2- Cálculo dos esforços de fixação devidos a  $\Delta T$  numa estrutura com Barras Axialmente **Indeformáveis**

### 3.6 - Aparelhos de apoio elásticos

3.6.1 - Análise e discussão de um problema particular envolvendo molas.

### 3.7 - Barras inclinadas

3.7.1 - Método directo

3.7.2 - Mudança de Base

3.7.2.1.- Matriz de Transformação de Coordenadas

3.7.2.1.1 - Propriedade da Matriz de Transformação de Coordenadas

3.7.3- Equação do Método dos Deslocamentos

3.7.3.1- Matriz de rigidez da barra encastrada encastrada em coordenadas globais

3.7.4. - Equação de sobreposição de efeitos para esforços

### 3.8 - Aparelhos de apoio inclinados

3.8.1 - Aparelhos de apoio inclinados- método directo

3.8.2 - Aparelhos de apoio inclinados- método matricial

3.8.2.1 - Método Matricial - Resolução Formal

3.8.2.1 - Método Matricial - Procedimento Prático Manual

### 3.9.- Cálculo de forças nodais de fixação

3.9.1- Cálculo de forças de fixação recorrendo ao equilíbrio da estrutura cinematicamente determinada desmembrada nos seus elementos singulares, barras e nós.

3.9.1.1- Caso de barras axialmente deformáveis

3.9.1.2- Caso de barras axialmente indeformáveis

3.9.2- Cálculo de forças de fixação recorrendo ao equilíbrio da estrutura global cinematicamente determinada.

3.9.3- Cálculo de forças de fixação recorrendo ao P.T.V

3.9.4- Cálculo de forças de fixação recorrendo à mudança de base.

### 4.- Algoritmo de Implementação Matricial do Método dos Deslocamentos.

4.1- Etapas de cálculo

4.1.1.- Exemplo 4.1

4.2- Alguns aspectos a considerar

4.2.1- Semibanda

4.2.2- Método da penalização. Exemplo 4.2

4.2.3- Método da eliminação

4.2.4- Assentamentos de apoio. Deformações impostas

4.2.5- Cálculo das reacções de apoio

## 5.-Grelhas

- 5.1- Definição e Objectivos
- 5.2- Esforços relevantes numa grelha
- 5.3- Deslocamentos nodais independentes
- 5.4- Elemento base de grelha
- 5.5- Matriz de rigidez do elemento grelha encastrado encastrado
- 5.6- Representação gráfica de apoios

## 6.- Tópicos Avançados. Condensação da matriz de rigidez

- 6.1- Equação de sobreposição de efeitos para esforços. Exemplos 6.1 e 6.2.
  - 6.1.2- Condensação "manual"
- 6.2- Método da subestruturação.

## **ANEXOS A e B**

### A.- Resumo das noções de Trabalho e Energia

#### A.1- Trabalho

#### A.2 - Energia

#### A.3- Trabalho de Deformação

##### A.3.1- Energia ou Trabalho de Deformação Elástica para Tensões Normais

###### A.3.1.1.- Barra Sujeita à Tração Pura, N

###### A.3.1.2- Barra Sujeita à Flexão Pura, M.

##### A.3.2- Energia ou Trabalho de Deformação Elástica para Tensões Tangenciais

###### A.3.2.1- Barra Sujeita ao Esforço Transverso (ou Corte)

###### A.3.2.2- Barra Sujeita ao Momento Torçor, T

##### A.3.3.- Caso Geral de Solicitação de uma Barra

##### A.3.4- Energia ou Trabalho de deformação para o caso mais geral de tensões

### B.- Princípio dos Trabalhos Virtuais

#### B.1- Corpos Rígidos

##### B.1.1- Princípio dos Deslocamentos Virtuais

#### B.2- Corpos Deformáveis

##### B.2.1.- Princípio dos Trabalhos Virtuais

###### B.2.1.1.- Princípio dos Trabalhos Virtuais para Forças Virtuais

###### B.2.1.1.1- Método da Carga Unitária

###### B.2.1.2.- Princípio dos Trabalhos Virtuais para Deslocamentos Virtuais

###### B.2.1.2.1- Aplicação do PTV (PDV) ao cálculo de reacções de apoio de estruturas

cinematicamente determinadas.

##### B.2.2.- Demonstração do PTV

#### B.3- Teorema do Deslocamento Recíproco ou de Maxwell

#### B.4- Teorema do Trabalho Recíproco ou de Betty~

1.- Esforços Independentes e Dependentes

Imagine-se uma estrutura sujeita a um determinado carregamento (figura 1-1a), e por isso deformada e em equilíbrio com o mesmo. É sempre possível "retirar" uma barra e fazer o estudo das forças que actuam sobre a mesma. Essas forças são quer os esforços actuantes nas extremidades  $i$  e  $j$  assim como eventuais cargas aplicadas ao longo do vão da barra. Os esforços de extremidade equilibram as cargas de vão aplicadas. Aos esforços vamos designá-los por  $M_i, V_i, N_i, M_j, V_j$  e  $N_j$  como mostra a figura 1-1b).

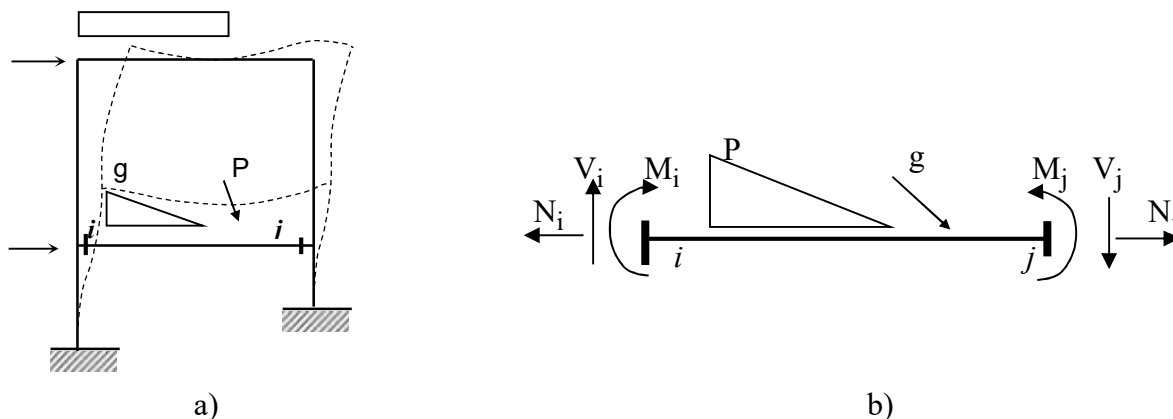


Figura 1.1

Ao imaginarmos a barra retirada da estrutura mas interligada com esta através dos seus extremos, podemos assumir que as secções extremas serão os pontos exteriores da barra, ou ainda de outra forma, os seus apoios. A barra é então considerada uma estrutura **biencastrada** na estrutura original, ficando, como sabemos, uma estrutura exteriormente hiperestática do 3º grau. Quer dizer que só é possível calcular os esforços internos na barra se se conhecerem *a priori* três das seis das reacções exteriores, isto é, três dos esforços antes indicados por  $M_i, V_i, N_i, M_j, V_j$  e  $N_j$ .

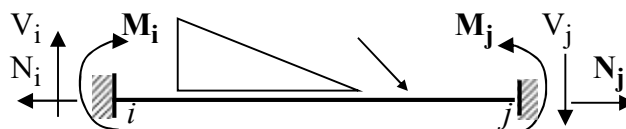


Figura 1.2- Barra considerada como elemento biencastrado

Estes podem ser escolhidos arbitrariamente. No entanto por questões de ordem prática é vantajoso escolher  $M_i, M_j,$  e  $N_j,$  que se designarão por *esforços independentes*. Conhecendo então o valor destes esforços é possível determinar o valor dos restantes ( $V_i, V_j, N_j$ ), os esforços dependentes, assim como os esforços em qualquer secção da barra, usando as Equações de Equilíbrio da Estática que são:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_0 = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Ao serem conhecidos os três esforços independentes a barra torna-se *Estaticamente Determinada*. Como estes esforços independentes resultam da resolução da estrutura hiperestática são também conhecidos por **esforços hiperestáticos**.

No cálculo estrutural agrupam-se os esforços independentes barra a barra num vector, o vector de esforços independentes  $\{X\}$  (ler nota nota <sup>1</sup> no rodapé, s.f.f.).

$$\{X\}^T = \{ M_i, M_j, N_j, \quad M_i, M_j, N_j, \quad \dots \quad M_i, M_j, N_j \} \quad (1.2)$$

Sendo então conhecidos os valores  $M_i$ ,  $M_j$ , e  $N_j$  da barra podemos libertar os vínculos associados a estes esforços, transformando a barra biencastrada numa barra apoiada à esquerda com apoio deslizante à direita, e nas extremidades colocar os esforços independentes (hiperestáticos). Sobre a barra colocaremos as "cargas aplicadas de vão". Esta transformação é válida em termos de esforços dizendo-se então que as duas barras são *estaticamente equivalentes*. A figura 1.2 pode então ser representada pela figura seguinte:

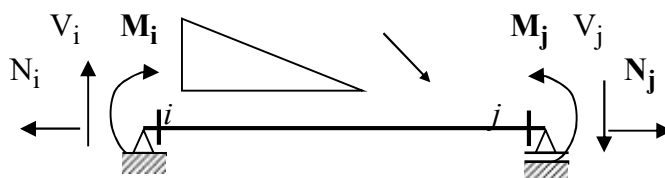


Figura 1.3 - Barra estaticamente equivalente à da figura 1.2

O cálculo dos esforços ao longo da barra da estrutura inicial fazer-se-á sobre esta nova "viga simplesmente apoiada" mas em duas fases. Na primeira só lhe aplicamos os esforços independentes. Aos diagramas de esforços da primeira fase designaremos diagramas hiperestáticos ( $M^h, V^h, N^h$ ) e aos da segunda diagramas isostáticos ( $M^i, V^i, N^i$ ). Os

<sup>1</sup> O vector  $\vec{X}$ , por exemplo, representar-se-á por  $\{X\}$  ou por  $\tilde{X}$ . A matriz B, por exemplo, representar-se-á por  $[B]$  ou por  $\underline{B}$ . A primeira forma de escrita é mais fácil de aplicar a texto dactilografado enquanto a segunda no texto escrito manualmente. Além disso os vectores estão "deitados" ou transposto poupar espaço..

esforços finais obtêm-se da soma destas duas parcelas, que também se designam respectivamente pelas parcelas hiperestática e isostática.

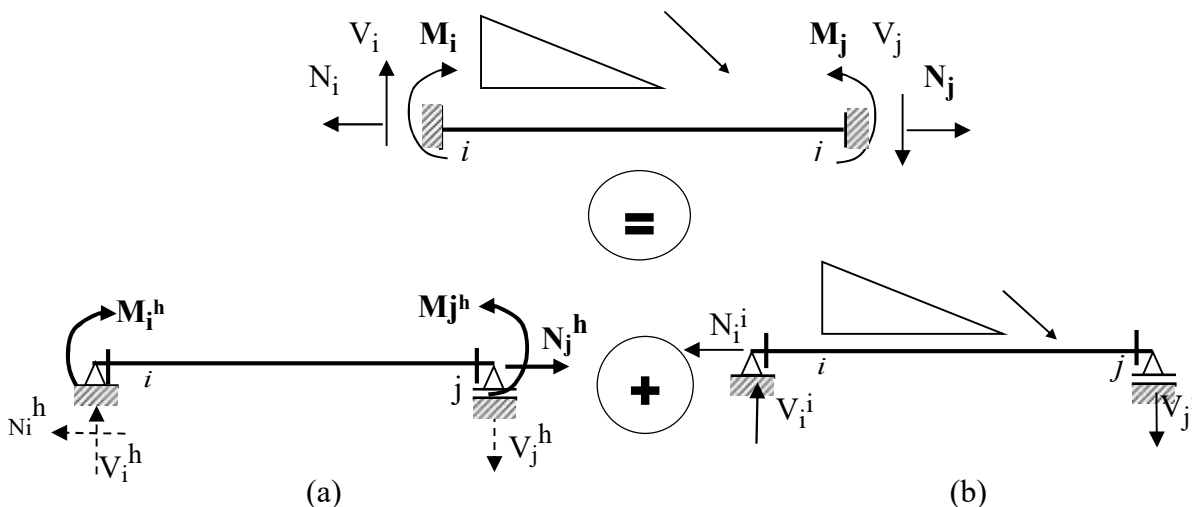


Figura 1.4 - Parcelas hiperestática (a) e isostática (b) de esforços actuantes numa barra

Na parcela hiperestática, por equilíbrio de forças horizontais obtemos  $N_i^h = N_j^h$ , e, por equilíbrio de momentos na "viga simplesmente apoiada", obtemos os esforços transversos hiperestáticos,  $V_i^h$  e  $V_j^h$ :

$$V_i^h = V_j^h = \frac{M_j^h - M_i^h}{L} = \frac{\text{Mom.Direita} - \text{Mom.Esquerda}}{\text{Vão}} \quad (1.3)$$

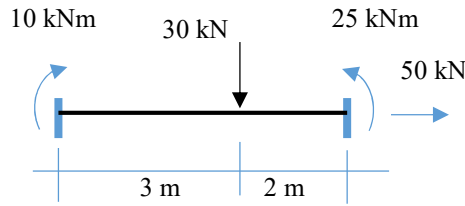
Repare-se que o diagrama de momentos hiperestático é sempre trapezoidal, que os esforços transversos hiperestáticos e normais hiperestáticos são sempre constantes.

A quantificação dos esforços da parcela isostática  $V_i^i$ ,  $V_j^i$ , e  $N_j^i$  é imediata visto a barra ser uma "viga simplesmente apoiada" sujeita a acções de vão, e cujos esforços referidos são imediatamente determinados pelas Equações de Equilíbrio da Estática. Repare-se que  $M_i^i$  e  $M_j^i$  são nulos.

Os esforços finais nas extremidades  $i$  e  $j$  da barra são obtidos por sobreposição de efeitos valendo:

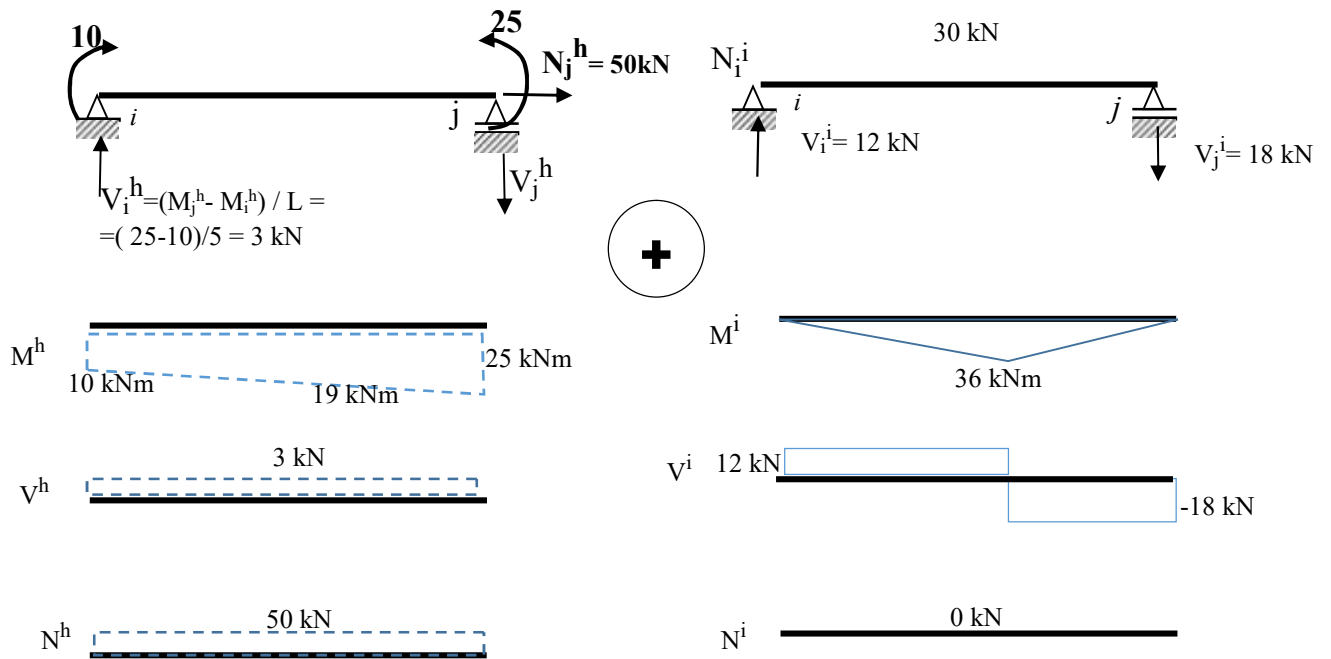
$$\begin{aligned} M_i &= M_i^h ; & V_i &= V_i^h + V_i^i ; & N_i &= N_i^h + N_i^i \\ M_j &= M_j^h ; & V_j &= V_j^h + V_j^i ; & N_j &= N_j^h \end{aligned} \quad (1.4)$$

Exemplo: Desenhe os diagramas de esforços decompondo-os nas parcelas hiperestáticas e isostáticas

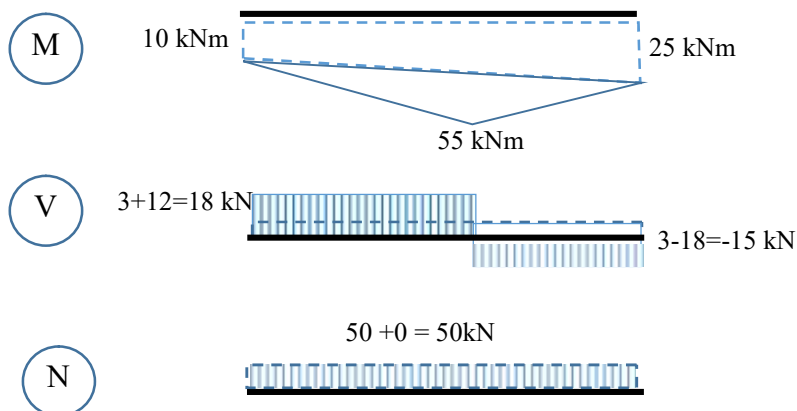


Parcelas Hiperestáticas de Esforços

Parcelas Isostáticas de Esforços



Esforços Finais





## Método dos Deslocamentos

### 2.1- Discretização de uma estrutura

Discretizar uma estrutura consiste em identificar nela as barras, nós, libertações internas e externas e apoios. Uma estrutura fica reduzida a um conjunto de **barras** devidamente orientadas, ligadas entre si e ao exterior por **nós** (interiores e exteriores). As libertações podem situar-se no interior das barras (libertações internas) ou entre os nós e o exterior (libertações externas).

O processo de discretização é necessário para a organização do cálculo, obrigando-se a efectuar, no mínimo, as seguintes operações:

- (i) numerar os nós,
- (ii) numerar as barras,
- (iii) orientar as barras e numerar as suas secções extremas.

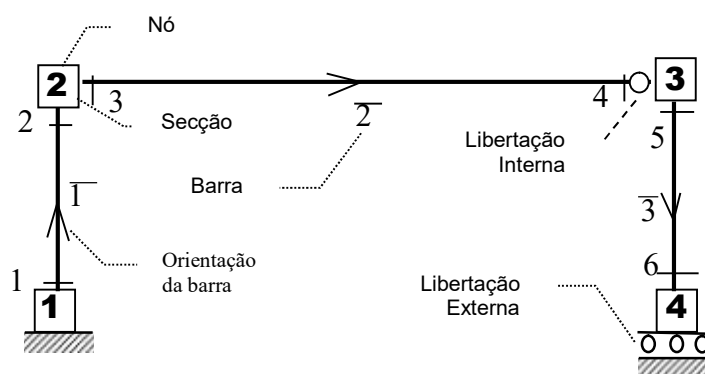


Figura 2.1 - Discretização da Estrutura

### 2.2- Deslocamentos e Descontinuidades

No plano, cada nó não restringido pode ter três deslocamentos. duas translações e uma rotação, que se designam por *deslocamentos generalizados*.

As libertações internas ou externas são aparelhos que permitem deslocamentos relativos entre as secções a eles adjacentes, anulando sempre o esforço associado ao tipo libertação. Assim, uma rótula (figura 2.2-a)) permite rotações relativas livres e anulará momentos nas secções adjacentes à rótula. Um aparelho deslizante transversal (figura 2.2-b)) permite deslocamentos transversais livres e anula o esforço transverso. Os deslocamentos relativos nas libertações internas e externas (rotações, libertação de esforço transverso ou axial) podem também ser designadas por *descontinuidades generalizadas* porque podem dizer respeito rotações ou translações relativas, como mostra a figura 2.2.

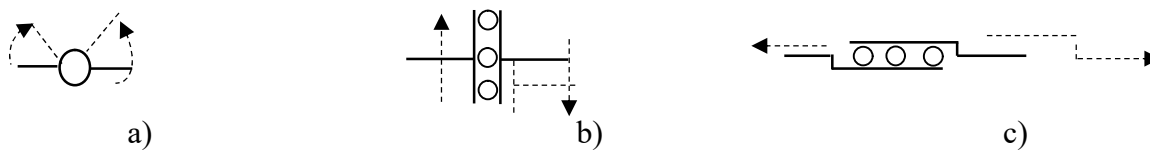


Figura 2.2 - Aparelhos de libertação e discontinuidades: (a) rótula, (b) aparelho deslizante transversal e (c) aparelho deslizante longitudinal.

### 2.3- Equilíbrio do Elemento Barra

Imagine-se uma estrutura antes e depois de ser solicitada por determinado “carregamento” (ver figura 2.3-b)). Uma barra pertencente à estrutura passará da sua posição não deformada AB para outra posição deformada A'B', após a solicitação. A posição final da barra A'B' é resultado dos deslocamentos  $\{q\}_m$  sofridos pelos seus nós extremos como se mostra na figura 2.3-b).

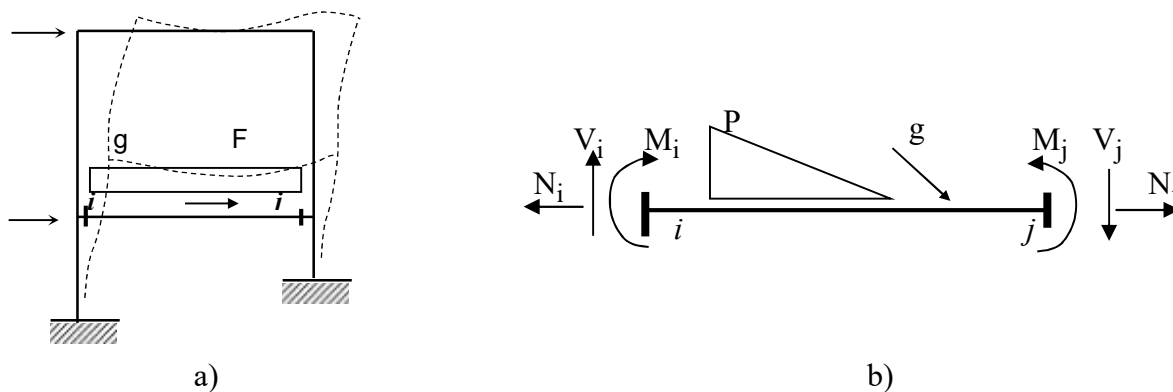


Figura 2.3

Os deslocamentos nodais referidos, são independentes, e são agrupados no vector dos deslocamentos nodais independentes (d.n.i.),  $\{q\}_m$  do elemento barra “m”. Para além disso os deslocamentos nodais estão associados a um referencial local, cujo eixo 2 coincide com o eixo da barra, conforme a figura 2.4.

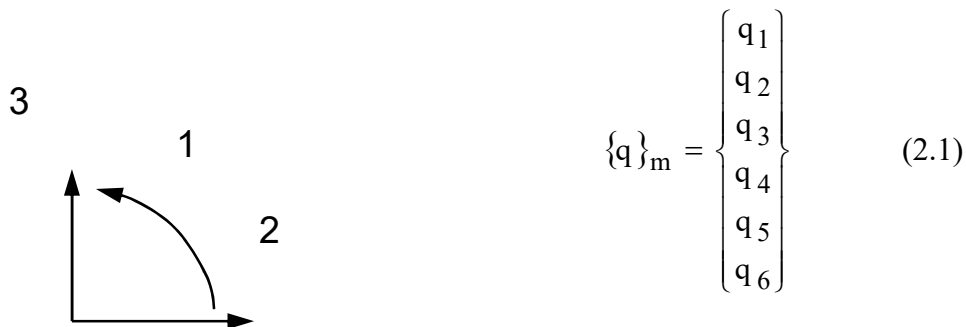


Figura 2.4 - Referencial local e vector dos deslocamentos nodais independentes (d.n.i.).

Para manter a barra deformada (isto é na posição A'B') deverão actuar forças nos nós extremos que são as forças nodais de equilíbrio  $\{Q\}_m$ . Estas são positivas se actuarem no sentido dos deslocamentos nodais independentes antes definidos (figura 2.5).

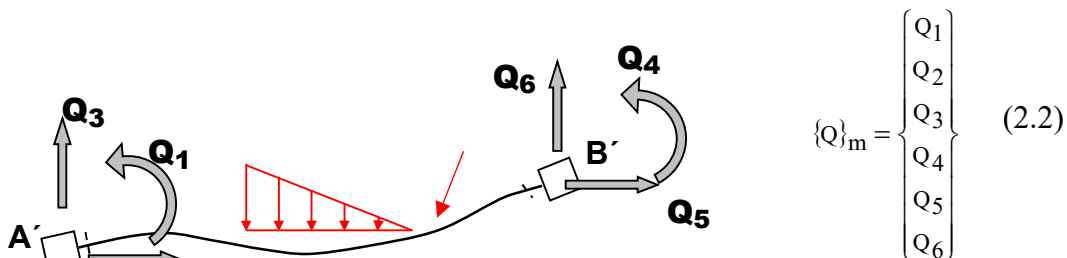


Figura 2.5 - Forças Nodais de Equilíbrio,  $\{Q\}_m$ .

As forças nodais podem ser decompostas em duas parcelas:

- (i) a primeira, equilibra apenas as forças de vão, supondo que os deslocamentos nodais são todos nulos. Estas forças evitam os deslocamentos dos nós quando actuam as cargas de vão, são forças nodais de fixação de cargas de vão ou de bloqueamento, e são agrupadas no vector  $\{Q_0\}_m$ .

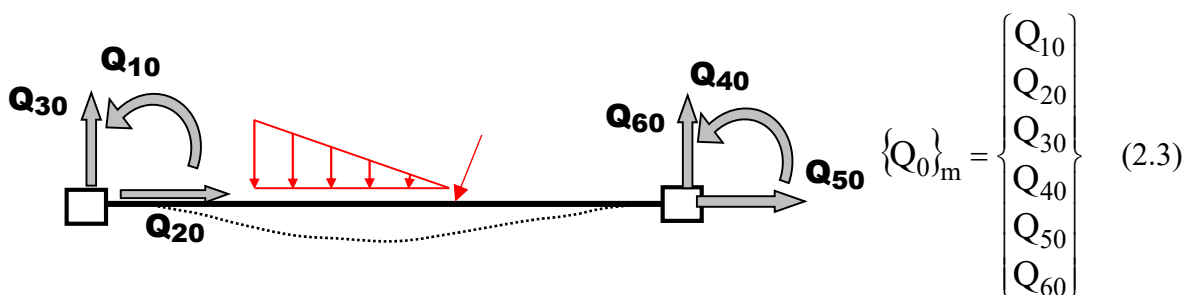


Figura 2.6 - Forças nodais de fixação de cargas de vão,  $\{Q_0\}_m$ .

- (ii) a segunda parcela,  $\{Q_C\}_m$ , (solução complementar) representa as forças necessárias aplicar aos nós para os manter na posição final A'B', isto é, **manter** os deslocamentos nodais  $\{q\}_m$  fixos, supondo que as cargas de vão são nulas. Estas forças são as Forças Nodais de Fixação Complementares e dependem dos diversos valores de deslocamentos nodais (*d1 a d6*). São o resultado da *combinação linear* destes deslocamentos, traduzido por  $\{Q_C\}_m = [K]_m * \{q\}_m$  (ver figura 2.7).

Resumindo temos :  $\{Q\}_m = \{Q_C\}_m + \{Q_0\}_m$  (2.4)

$$\{Q\}_m = [K] * \{q\}_m + \{Q_0\}_m$$
 (2.5)

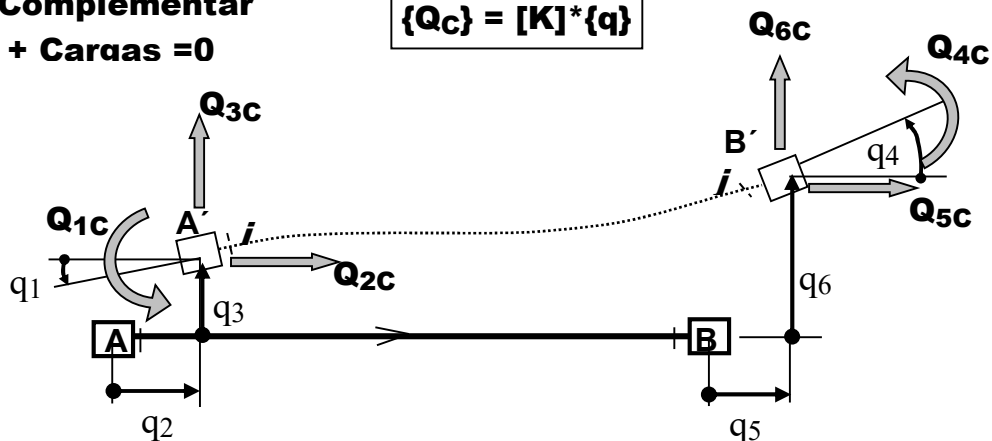
A parcela complementar pode ser decomposta nos seguintes casos elementares designados por **modos de deformação**.

**Parcela Complementar**

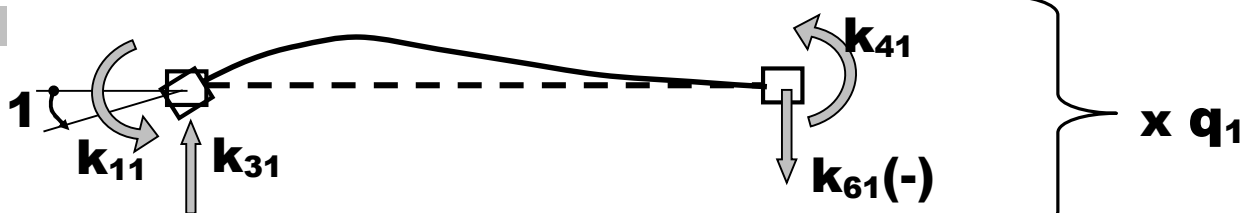
$\{a\} \neq 0 + \text{Cargas} = 0$

$\{Q_C\} = [K] \cdot \{q\}$

Modos de Deformação



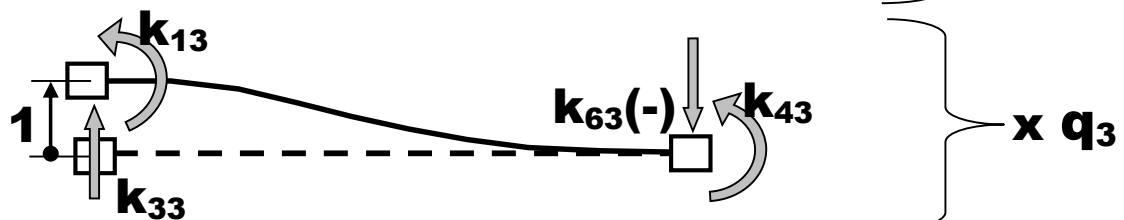
1º Modo



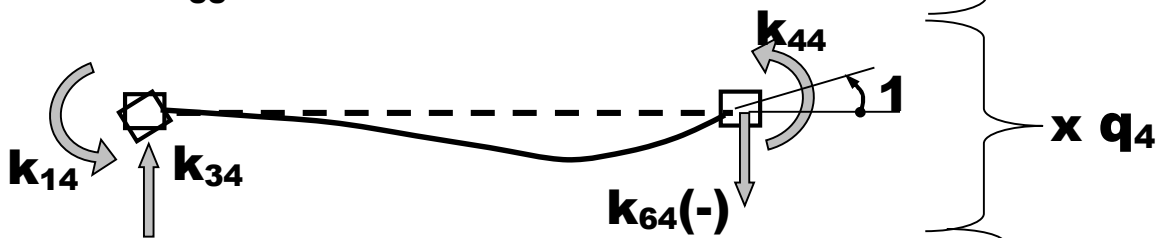
2º Modo



3º Modo



4º Modo



5º Mo3d



6º Modo

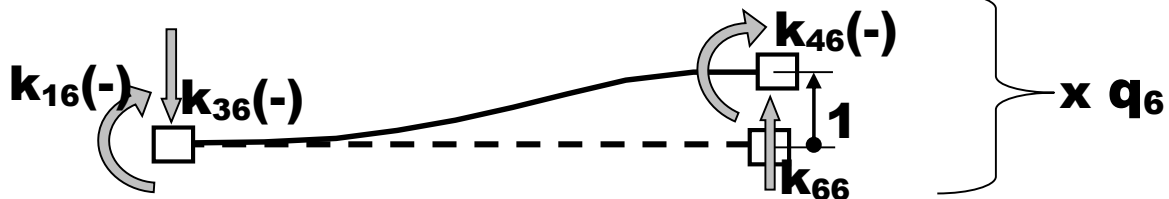


Figura 2.7 - a) Forças Nodais de Fixação Complementares  $Q_{cm}$ ; Modos de deformação elementarmente independentes de uma barra encastrada - encastrada

Da figura 2.7 podemos definir:

A matriz  $[K]_m$ , é a matriz de rigidez da peça linear associada aos deslocamentos nodais independentes  $\{q\}_m$ . **O coeficiente  $K_{ij}$  da matriz de rigidez da barra é a força nodal  $Q_i$  necessária aplicar ao elemento  $m$ , segundo o deslocamento nodal independente  $q_i$ , quando a ele se impõe o deslocamento nodal unitário  $q_j=1$  e se mantêm nulos todos os outros deslocamentos ( $q_k=0$  com  $k \neq j$ ) assim como a solicitação de vão ( $f=0$ ).**

Da figura 2.6 podemos definir:

**O coeficiente  $Q_{i0}$  do vector das forças de fixação (das cargas de vão)  $\{Q_0\}_m$ , representa a força nodal necessária aplicar no elemento  $m$ , na direcção do deslocamento nodal  $q_i$  quando ao elemento se aplica a solicitação de vão  $f$  ( $f \neq 0$ ), e se mantêm nulos todos os deslocamentos nodais independentes, ( $q_m=0$ ).**

Por exemplo para o elemento seguinte teríamos:

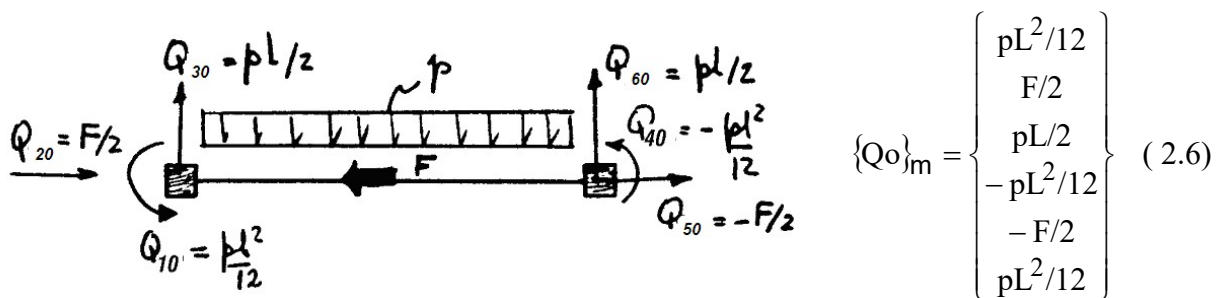


Figura 2.8 - Exemplo de Vector de Forças  $\{Q_0\}_m$  para um caso concreto

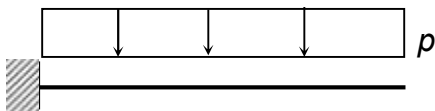
### 2.3.1- Elemento Base

Designa-se por elemento base à peça linear (barra) livre de solicitações de vão e com todos os deslocamentos nodais independentes bloqueados. O elemento base é cinematicamente determinado por se conhecerem os deslocamentos independentes  $q_1$  a  $q_6$ . Para o caracterizarmos, de modo a ser útil nos cálculos seguintes devemos determinar:

- (i) a matriz de rigidez  $[K]_m$  do elemento base, e,
- (ii) o vector de forças de fixação  $\{Q_0\}_m$  para os casos de carga de vão mais correntes.

Problema:

Defina o vector das forças de fixação da barra seguinte.



2.3.2- Cálculo da matriz de rigidez de um elemento encastrado-encastrado

Suponha que o elemento base é uma peça linear flexível de secção constante com área  $A$ , inércia  $I$  e comprimento  $L$ , rigidamente ligado aos nós extremos, como se mostra na figura 2.9. Como a parte flexível da barra está rigidamente ligada aos nós extremos podemos designar este elemento base como *encastrado-encastrado* (E-E).

O elemento apresenta seis deslocamentos nodais independentes,  $q_1$  a  $q_6$ , (figura 2.9). A matriz de rigidez, associada a tais deslocamentos nodais, é determinada coluna a coluna, por exemplo para a coluna "j", determinando as forças de fixação nodais, quando se impõe o deslocamento  $q_j=1$  e se mantêm os restantes deslocamentos nodais nulos.

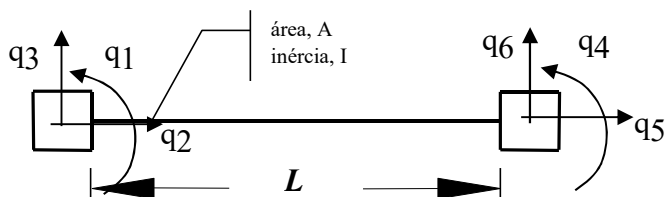


Figura 2.9 - Elemento base encastrado-encastrado (E-E)

Por exemplo quando  $q_3=1$ ,  $q_1=q_2=q_4=q_5=q_6=0$  a configuração da barra é a da figura 2.7 do modo 3, sendo os coeficientes  $k_{ij}$  as forças de fixação da barra (lidos segundo a ordem de leitura dos deslocamentos nodais). Como a barra em questão é uma estrutura hiperestática teremos que recorrer por exemplo ao Método das Forças ou à equação diferencial da linha elástica, para quantificar tais forças nodais de fixação.

Repete-se o processo para os restantes deslocamentos nodais. Obtêm-se de seguida a matriz de rigidez da barra a qual relaciona os deslocamentos nodais  $\{q\}_m$  com as forças nodais de fixação complementar  $\{Q_c\}_m$  pela igualdade:

$$\{Q_c\}_m = [K]_m * \{q\}_m \tag{2.7}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{1c} \\ Q_{2c} \\ Q_{3c} \\ Q_{4c} \\ Q_{5c} \\ Q_{6c} \end{Bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 4EI/L & 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ 6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ -6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 \end{bmatrix}_m * \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}_m \tag{2.8}$$

### 2.3.3- Libertação Interna

Como consequência da discretização da estrutura as libertações internas são efectuadas junto aos nós coincidindo com as secções extremas dos elementos estruturais. No caso do elemento base encastrado-rotulado (E-R) a matriz de rigidez pode ser calculada pelo processo anterior, obtendo-se:

$$[k]_m = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 3EI/L & 0 & 3EI/L^2 & 0 & 0 & -3EI/L \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ 3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ -3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 \end{array} \right]_m \quad (2.9)$$

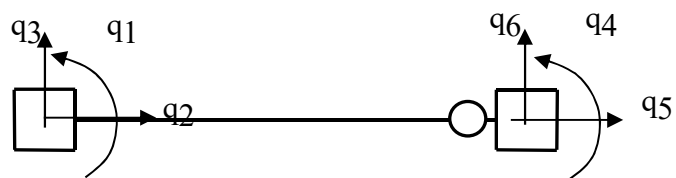


Figura 2.10 - Elemento base encastrado-rotulado, E-R e correspondente matriz de rigidez.

Como o momento flector correspondente à força  $Q_4$  é nulo, a 4ª linha tem coeficientes nulos. Em termos físicos, percebe-se que a 4ª coluna deverá ser nula, porque ao se impor o deslocamento  $q_4=1$  não há necessidade de introdução de forças nodais para manter a barra "deformada" pelo deslocamento  $q_4=1$ .



Figura 2.11- Deslocamento nodal independente  $q_4$ .

Este deslocamento nodal é independente mas não introduz esforços na barra. (Nota importante: a rotação  $q_4$  do nó é independente, mas a rotação relativa entre secções adjacentes à libertação interna é considerada como dependente).

2.3.4- Libertações Externas



Figura 2.12 - Barra E-E com rótula externa

Caso a rótula tivesse sido considerada fora da barra o campo de esforços e das forças nodais seria idêntico ao caso anterior, apenas diferindo no número de deslocamentos independentes do elemento. Podemos rescrever a igualdade:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4=0 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 4EI/L & 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ 6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ -6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}_m \quad (2.10)$$

mas com  $Q_4 = 0$ . Podemos escrever a 4ª equação em ordem a  $q_4$ , que fica com o seguinte aspecto:

$$q_4 = \frac{L}{4EI} \left( \frac{-2EI}{L} * q_1 - \frac{6EI}{L^2} * q_3 + \frac{6EI}{L^2} * q_6 \right) \quad (2.11)$$

A rotação  $q_4$  diz-se dependente porque pode ser escrita como combinação linear dos outros deslocamentos ( $q_1$ ,  $q_3$  e  $q_6$  concretamente). Substituindo esta equação na matriz anterior obtemos:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 3EI/L & 0 & 3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^2 \\ 0 & EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 & 0 & -3EI/L^3 \\ 0 & -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ -3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 & 3EI/L^3 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}_m \quad (2.12)$$

onde já não consta o deslocamento  $q_4$  por ser um deslocamento dependente. A figura 2.13 a) e b) evidencia graficamente a dependência de  $q_4$  face a um deslocamento nodal independente  $q_1$ , e face a uma acção de vão (carga uniformemente distribuída).



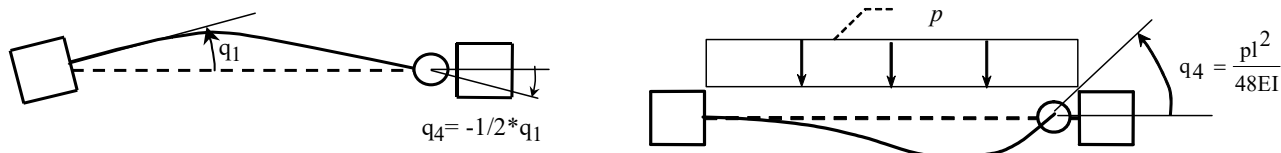


Figura 2.13 - Deslocamento  $q_4$  considerado como dependente.

2.3.5 - Matrizes de rigidez de vários elementos base

Apresentam-se de seguida as matrizes de rigidez mais importantes de barras pertencentes a pórticos planos. Os coeficientes de rigidez foram determinados e impondo sucessivamente os seis modos de deformação, a exemplo do que se mostra na figura 2.7, aos vários elementos base, recorrendo para tal ao método das forças, ou à equação diferencial da linha elástica.

2.3.5.1- Matriz de rigidez do elemento encastrado com libertação de esforço transversal à direita

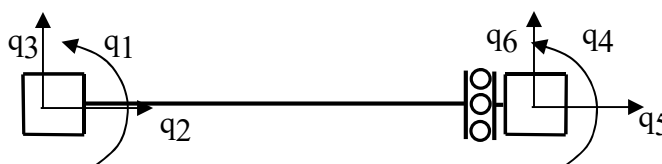


Figura 2.14 - Elemento E-V (ou E-D)

$$K_m = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} EI/L & 0 & 0 & -EI/L & 0 & 0 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -EI/L & 0 & 0 & EI/L & 0 & 0 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_m \tag{2.13}$$

(Nota: Este elemento também pode ser denominado de encastrado com apoio deslizante transversal ou somente encastrado-deslizante, E-D.)

2.3.5.2- Matriz de rigidez do elemento rotulado-rotulado



Figura 2.15 - Elemento R-R

$$K_m = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_m \quad (2.14)$$

2.3.5.3- Matriz de rigidez do elemento encastrado-encastrado com deformação por esforço

transverso

Para além da deformação axial e por flexão este elemento também é deformável por esforço transverso. Deve ser usado como modelação de paredes e consolas curtas.

$$K_m = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{4EI}{L} \phi \beta_1 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \phi & \frac{2EI}{L} \phi \beta_2 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \phi \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \phi & 0 & \frac{12EI}{L^3} \phi & \frac{6EI}{L^2} \phi & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \phi \\ \hline \frac{2EI}{L} \phi \beta_2 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \phi & \frac{4EI}{L} \phi \beta_1 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \phi \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \phi & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \phi & -\frac{6EI}{L^2} \phi & 0 & \frac{12EI}{L^3} \phi \end{array} \right]_m \quad (2.15)$$

com:

$$\beta_1 = 1 + \frac{\alpha}{2}, \beta_2 = 1 - \alpha, \alpha = \frac{6EI}{L^2} * \frac{1}{GA'} \quad (2.16-17 e 18)$$

$$\phi = \frac{1}{1 + 2\alpha}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.19-20)$$

A'= área de corte da secção transversal (ver anexo A-parágrafo A.3.2.1)

Repare-se que quando se despreza a influência da deformação por esforço transverso se faz  $GA' = \infty \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 1$ . Por outro lado quando L é grande  $\alpha \approx 0$  pelo que a influência deformabilidade por esforço transverso diminui.

2.3.5.4- Matriz de rigidez do elemento encastrado-encastrado com troços rígidos e com deformação por esforço transversor

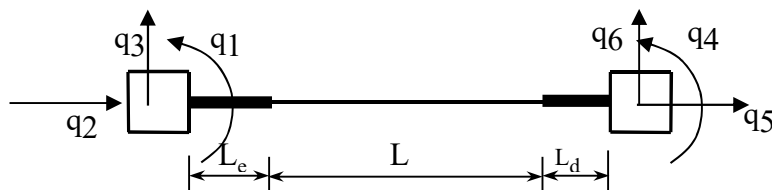


Figura 2.16 - Elemento E-E com troços rígidos e deformável por esf. transversor

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \phi \left[ \beta_1 + 3 \frac{L_e}{L} \left( 1 + \frac{L_e}{L} \right) \right] & 0 & \frac{6EI}{L^2} \phi \left( 1 + 2 \frac{L_e}{L} \right) & \frac{2EI}{L} \phi \left( \beta_2 + 3 \frac{L_e + L_d}{L} + 6 \frac{L_e L_d}{L^2} \right) & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \phi \left( 1 + 2 \frac{L_d}{L} \right) \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \phi \left( 1 + 2 \frac{L_e}{L} \right) & 0 & \frac{12EI}{L^3} \phi & \frac{6EI}{L^2} \phi \left( 1 + 2 \frac{L_e}{L} \right) & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \phi \\ \frac{2EI}{L} \phi \left( \beta_2 + 3 \frac{L_e + L_d}{L} + 6 \frac{L_e L_d}{L^2} \right) & 0 & \frac{6EI}{L^2} \phi \left( 1 + 2 \frac{L_e}{L} \right) & \frac{4EI}{L} \phi \left[ \beta_1 + 3 \frac{L_d}{L} \left( 1 + \frac{L_d}{L} \right) \right] & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \phi \left( 1 + 2 \frac{L_d}{L} \right) \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \phi \left( 1 + 2 \frac{L_d}{L} \right) & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \phi & -\frac{6EI}{L^2} \phi \left( 1 + 2 \frac{L_d}{L} \right) & 0 & \frac{12EI}{L^3} \phi \end{bmatrix}_m \tag{2.21}$$

Os troços rígidos à esquerda e à direita têm dimensão respectivamente de  $L_e$  e  $L_d$ . O significado dos restantes parâmetros está no parágrafo anterior.

2.3.5.5 - Tabelas de coeficientes de rigidez

Os coeficientes de rigidez de cada um dos elementos base até agora apresentados podem ser agrupados em quadros destinados ao uso prático na resolução manual de pequenas estruturas. Estes quadros apresentam-se numa compilação oriunda de diversas fontes e denominada "Tabelas de Estruturas".

## 2.4- Indeterminação Cinemática

### 2.4.1- Grau de Indeterminação Cinemático de um Corpo Rígido.

*Grau de indeterminação cinemático* de um corpo rígido é o número de graus de liberdade independentes que esse corpo pode ter.

No plano um corpo rígido tem três graus de liberdade **independentes**, que são a translação segundo  $x$ ,  $\delta_x$ , translação segundo  $y$ ,  $\delta_y$  e rotação,  $\theta$ . Qualquer movimento que o corpo descreva no plano, pode ser decomposto naqueles três deslocamentos e que por isso mesmo se designam por independentes.

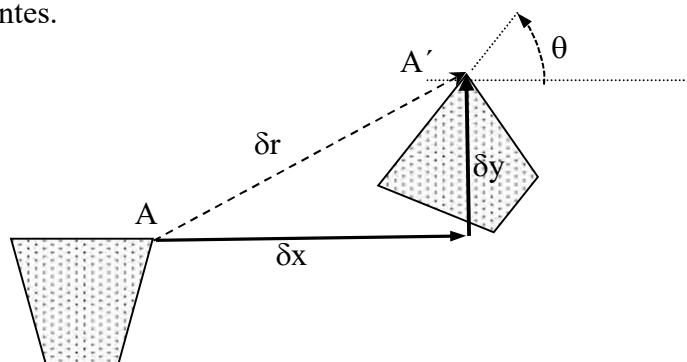


Figura 2.17 - Graus de liberdade de um corpo rígido no plano

### 2.4.2- Grau de Indeterminação Cinemático de uma Estrutura.

No Método dos deslocamentos a quantidade de deslocamentos nodais independentes (d.n.i) da estrutura designa-se por **grau de indeterminação cinemático** ( $\beta$ ) da estrutura, e é particularmente importante porque define o número de incógnitas (de natureza cinemática) que o método nos apresentará. Adianta-se desde já que esse número convirá ser o menor possível quando a análise é directa ou manual.

Designa-se por **grau de indeterminação cinemático** ( $\beta$ ) de uma estrutura, o número de deslocamentos generalizados (translações e rotações) linearmente independentes ( $d_i$ ) que se podem impor aos nós e também às libertações da estrutura interiores e exteriores.

Como nem sempre é evidente a determinação do  $\beta$  pode recorrer-se à seguinte definição "complementar":

O **grau de indeterminação cinemático** é o número (mínimo) de bloqueamentos (ligações fictícias) necessários impor aos nós e libertações de modo a transformar a estrutura num conjunto de **elementos base**. A estrutura constituída por um conjunto de elementos base designa-se por **Estrutura Fundamental** que é cinematicamente determinada.

Exemplo:

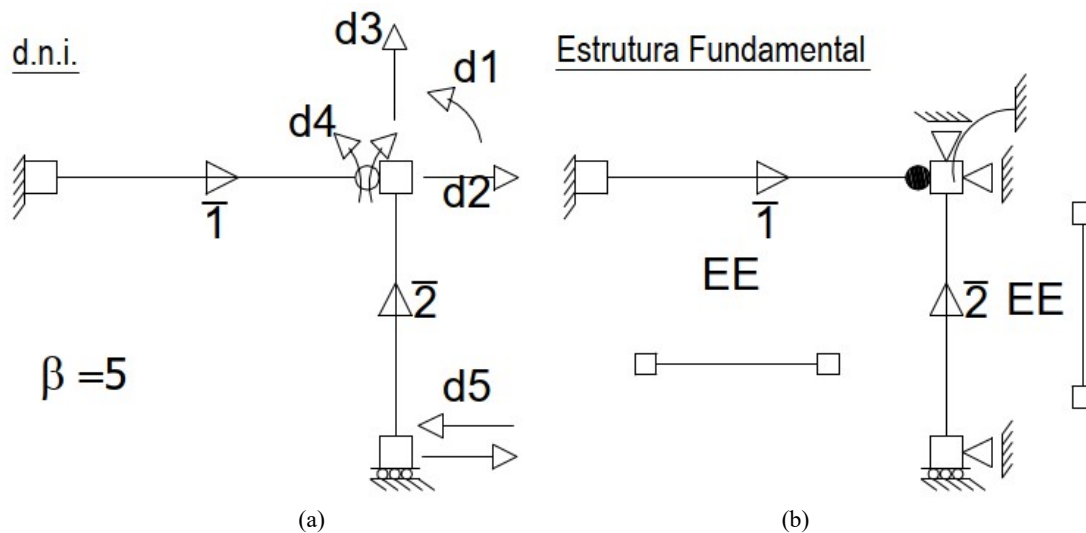


Figura 2.18 – Deslocamentos Nodais Independentes (d.n.i.) e Estrutura Fundamental

Vector de deslocamentos nodais independentes:  $\{\mathbf{d}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \\ \mathbf{d}_5 \end{Bmatrix}$  (2.22)

Grau de indeterminação cinemática: Rotações=3  $\Rightarrow \beta_{\text{Rotação}}=4$  (sendo uma relativa),  
 Translações=1 (interna e relativa.  $\Rightarrow \therefore$  Grau de Indeterminação cinemática,  $\beta=5$ )

Podemos identificar na *estrutura dada* da figura 2.18 a), os deslocamentos nodais ( $d_1$  a  $d_3$ ), duas discontinuidades sendo uma a rotação relativa ( $d_4$ ) e a outra a translação relativa ( $d_5$ ) possíveis. Deste modo o número de deslocamentos nodais independentes é de 5. Podemos confirmá-lo bloqueando esses 5 deslocamentos e avaliando se a estrutura obtida, a **estrutura fundamental** (figura 2.18 b)), é constituída por um conjunto de elementos base "conhecidos".

Realça-se que os bloqueamentos introduzidos são vínculos fictícios e temporários e que permitem obter uma estrutura cinematicamente determinada. Por outro lado dizemos que os elementos base são "conhecidos" porque temos (previamente) em nossa posse tabelas, que para todos os elementos base da estrutura fundamental nos dão os esforços (ou forças) de fixação quando o elemento estiver:

(i) ou sujeito a cargas de vão, e.

(ii) se impuser um deslocamento unitário a um dos seus nós (consultar o volume "Tabelas de Estruturas").

Poderíamos entretanto considerar a rotação relativa  $d_4$  e a translação relativa  $d_5$  como dependente dos restantes deslocamentos nodais ( $d_1$ ,  $d_2$  e/ou  $d_3$ ). Nesse caso estas descontinuidades não seriam bloqueadas, e conseqüentemente a barra 1 transformar-se-á num elemento base do tipo Encastrado - Rotulado (E-R) e a barra 2 na do tipo Encastrado - com Libertação de esforço transversal (E-V). Seria necessário ter as tabelas relativas destes dois novos tipos de elementos para "resolver" a estrutura.

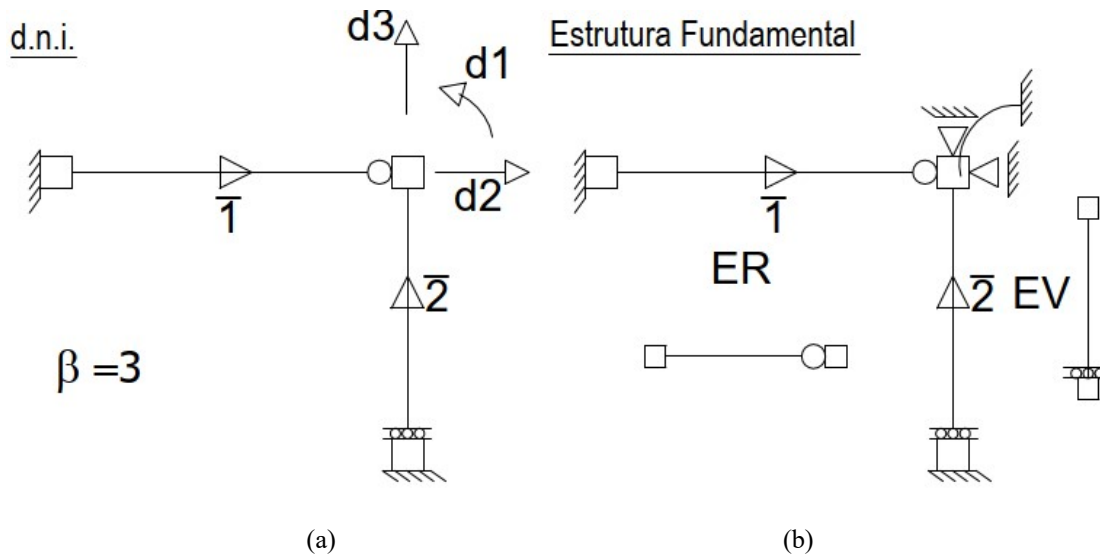


Figura 2.19 - Deslocamentos nodais independentes e Estrutura Fundamental

A estrutura fundamental agora obtida apresenta os seguintes deslocamentos nodais

independentes:  $\{\mathbf{d}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{Bmatrix}$ , e o grau de indeterminação cinemática  $\beta$  desce para 3.

É fácil deduzir que quanto maior for a diversidade de elementos base disponíveis menor será o grau de indeterminação cinemática, e vice-versa.

#### 2.4.2.1- Grau de Indeterminação Cinemática de uma Estrutura. Indeforabilidade Axial

Em geral, em pequenas estruturas reticuladas, os esforços de flexão resultantes da deformação axial das barras (exceptuando os tirantes) são desprezáveis face aos esforços resultantes das próprias deformações por flexão. Por este motivo, para estruturas pequenas, pode admitir-se a hipótese da **indeforabilidade axial das barras** ( $EA = \infty$ ), que consiste em admitir que segundo o eixo da barra não há alongamentos nem encurtamentos. Esta simplificação reduz o trabalho de cálculo, sobretudo quando o cálculo é elaborado manualmente. A admitindo agora que, à estrutura que tem vindo a ser estudada, se considera a hipótese da indeforabilidade axial das barras. Nesse caso, verificamos que basta apenas

impedir a rotação  $d_1$ , para transformar a estrutura num conjunto de elementos base conhecidos (figura 2.20). O grau da indeterminação cinemática é agora  $\beta = 1$ . As barras 1 e 2 são respectivamente E-R, E-V.

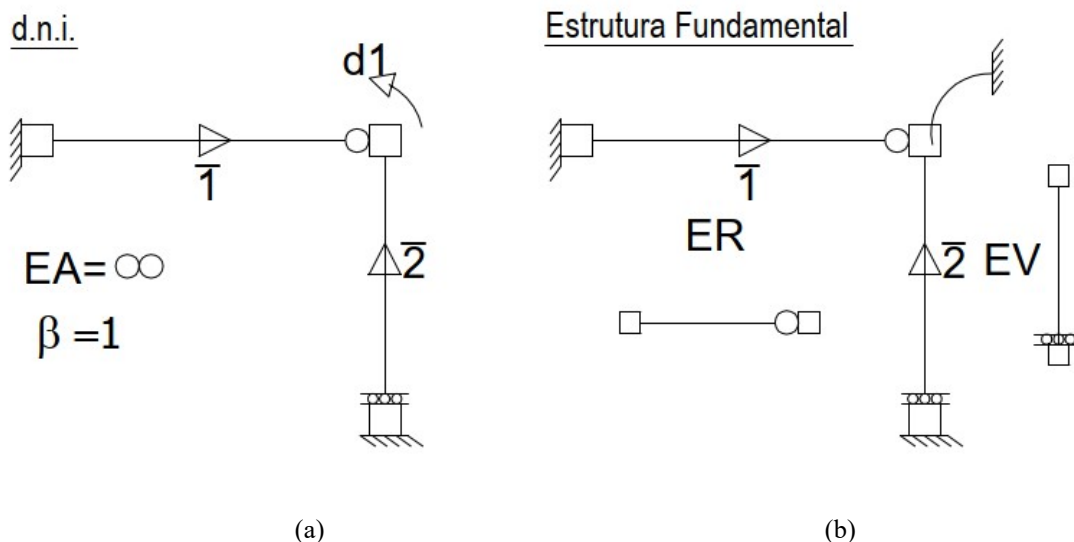


Figura 2.20 - Deslocamentos nodais independentes e Estrutura Fundamental na hipótese da indeformabilidade axial das barras

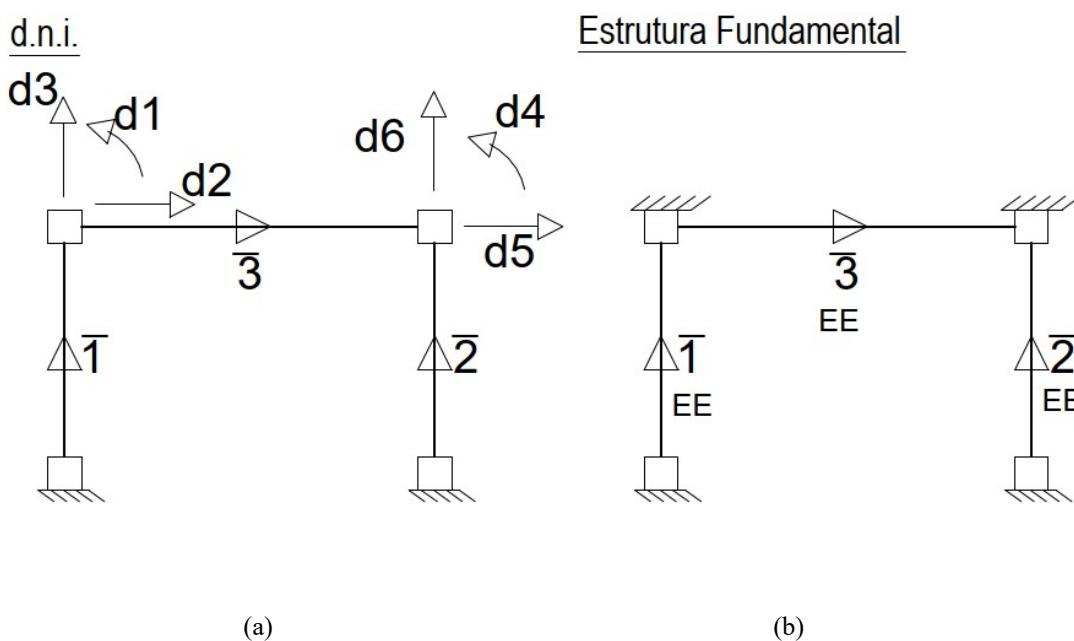


Figura 2.21 - Deslocamentos nodais independentes e Estrutura Fundamental de um pórtico flexível axialmente e por flexão.

No pórtico da figura 2.21 a), cujas barras são deformáveis axialmente e por flexão, apresenta seis deslocamentos nodais independentes ( $d_1$  a  $d_6$ ). Facilmente se constrói a

estrutura fundamental, bloqueando tais deslocamentos, a qual será constituída por barras do tipo E-E.

Admitindo que o pórtico da figura 2.21 a) é axialmente indeformável verificamos de imediato que: (i) os deslocamentos  $d3$  e  $d6$  não são possíveis visto não ser possível o alongamento dos pilares, (ii) os deslocamentos  $d2$  e  $d5$  são interdependentes porque um deslocamento só é possível se o outro se manifestar em simultâneo e por isso estes dois deslocamentos serão representados por um único só, por exemplo o  $d5$ , que é o  $d3$  da Figura 2.22 a), (iii) as rotações  $d1$  e  $d4$  mantêm-se designando-se agora por  $d1$  e  $d2$ . na figura 2.22 a).

O que o grau de indeterminação cinemática reduz-se a 3. A estrutura fundamental obtêm-se bloqueando esses três deslocamentos, através das ligações fictícias apresentadas na figura 2.22 b).

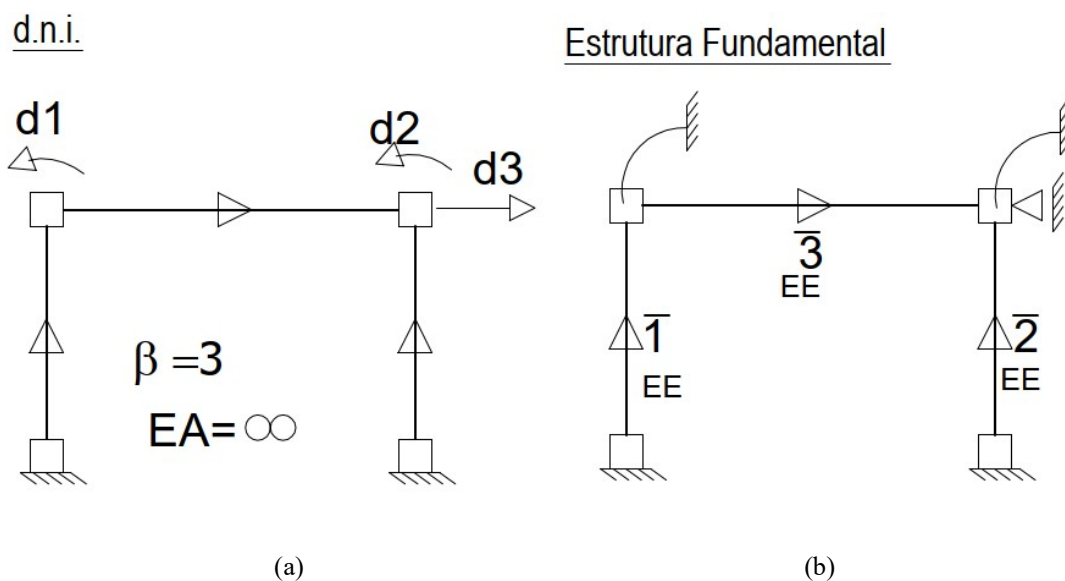


Figura 2.22 - Deslocamentos nodais independentes e Estrutura Fundamental de um pórtico na hipótese da indeformabilidade axial das barras

#### 2.4.2.2- Grau de Indeterminação Cinemática de uma Estrutura. Indeformabilidade por Flexão

Se na estrutura anterior considerássemos que a viga seria também rígida à flexão os deslocamentos nodais independentes e a estrutura fundamental seriam os apresentados na figura 2.23, e o grau de indeterminação cinemática seria  $\beta=1$ . Desenhe o modo de deformação correspondente.



Se realizássemos um novo exercício sobre a estrutura anterior considerando a viga rígida à flexão e axial mas os pilares deformáveis à flexão e axialmente os deslocamentos nodais independentes e a estrutura fundamental seriam os apresentados na figura 2.23, e o grau de indeterminação cinemática é  $\beta=3$ . Desenhe o modo de deformação correspondente.

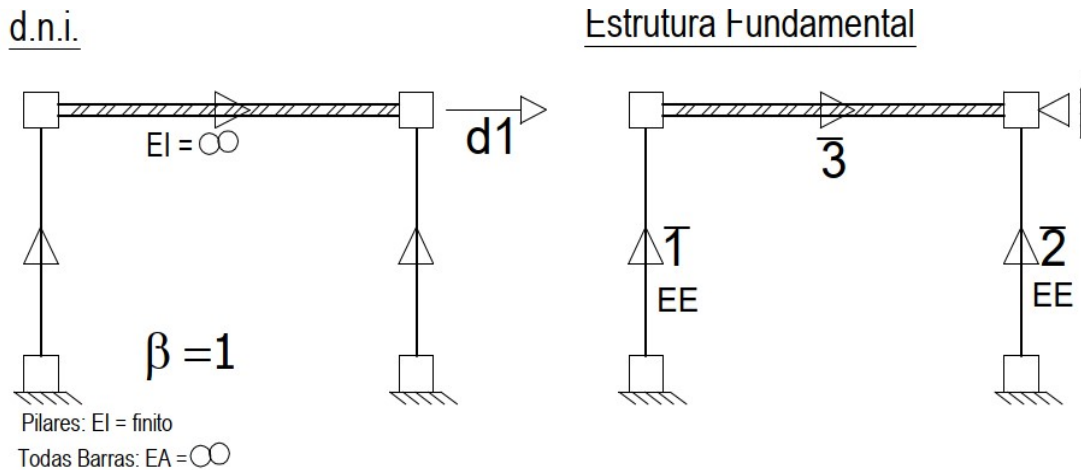


Figura 2.24 - Deslocamentos nodais independentes e Estrutura Fundamental de um pórtico na hipótese da indeformabilidade axial e por flexão apenas na viga.

**Conclusão:**

Como vimos o grau de indeterminação cinemática  $\beta$  depende :

- a) da diversidade de tipos de elementos base que adoptamos (EE,ER,EV,RR);
- b) do facto de se considerar ou não a indeformabilidade axial e ou de flexão das barras.

2.5 - Modos de Deformação da Estrutura

Se na estrutura fundamental impusermos um deslocamento unitário  $d_i=1$  no sentido de um deslocamento independente e mantivermos os todos os restantes bloqueados, a estrutura apresentará uma deformada, também independente que se designa por **modo de deformação** associado a esse deslocamento nodal  $d_i$ . O número de modos de deformação independentes é

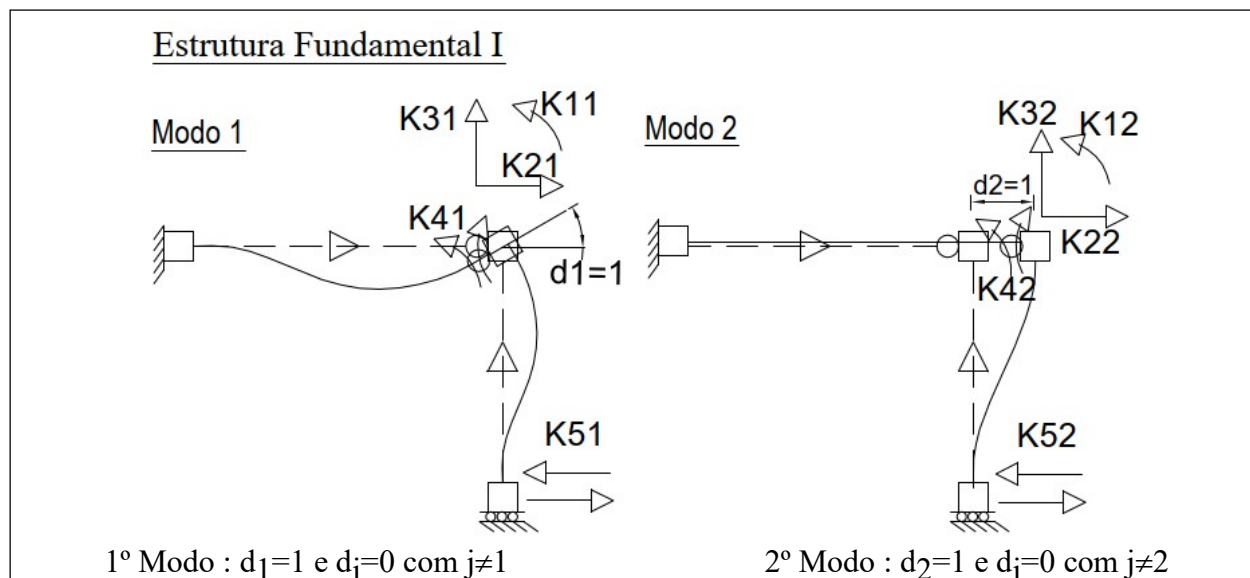


Figura 2.25- 1º e 2º Modos de deformação da estrutura fundamental da figura 2.18(b)

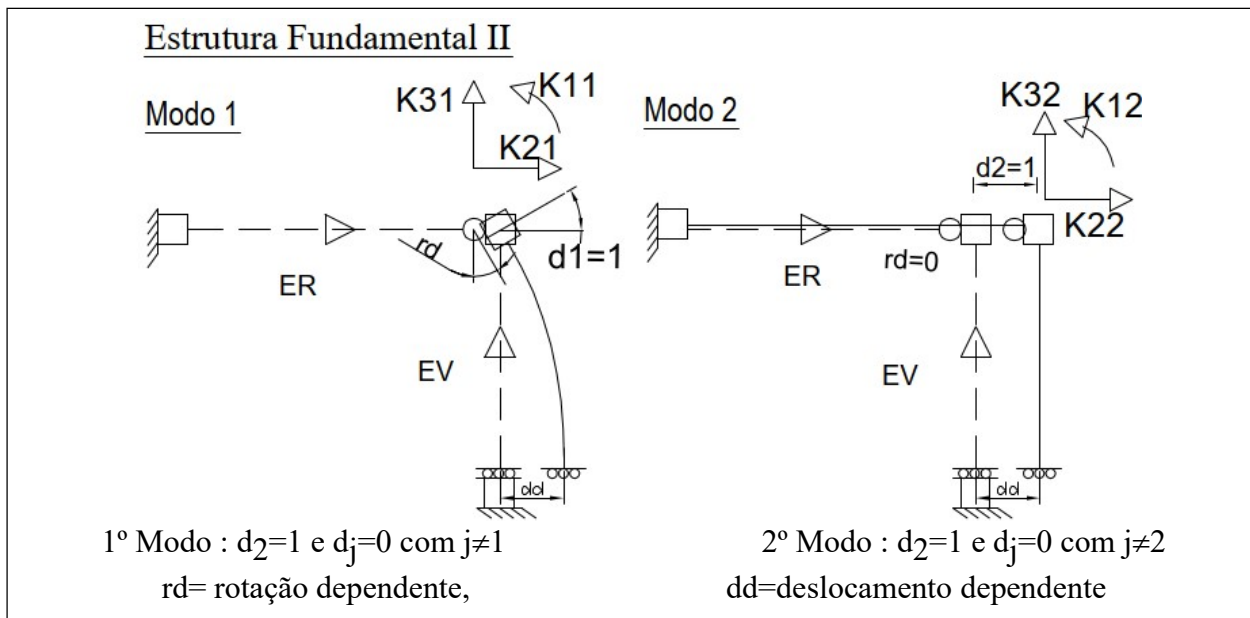


Figura 2.26- 1º e 2º Modos de deformação da estrutura fundamental da figura 2.19(b)

Como exercício desenhe o

3º Modo de

deformação.

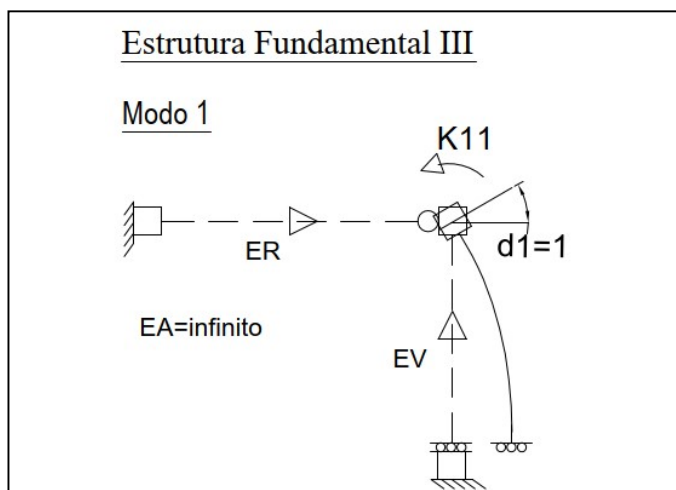


Figura 2.27 - Modos de deformação relativos à estrutura da figura 2.20(b)

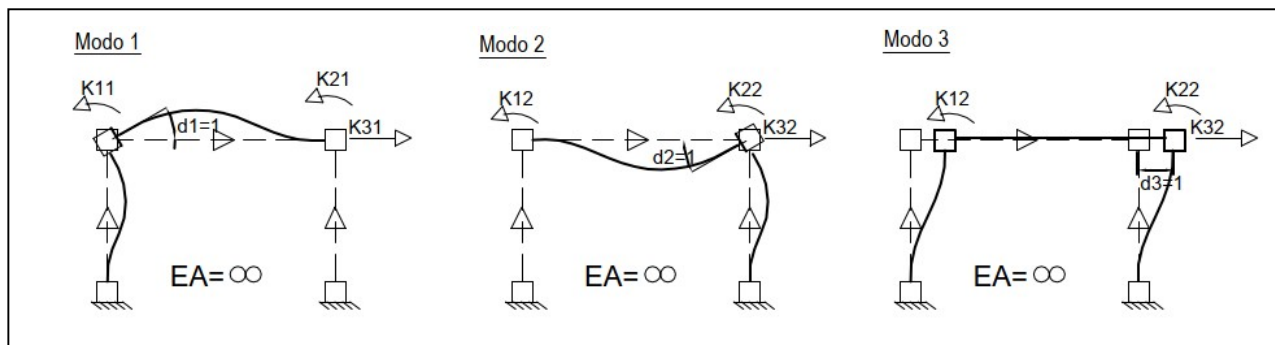


Figura 2.28 - Modos de deformação relativos à estrutura da figura 2.22.

## Método dos Deslocamentos

### 3.1- Fundamentação Método dos Deslocamentos

Como já foi referido, as incógnitas no Método dos Deslocamentos são os deslocamentos nodais independentes (d.n.i) que se verificam nos nós de discretização da estrutura e/ou nas descontinuidades em aparelhos de libertação (internas e/ou externas) que possam existir.

A estrutura diz-se cinematicamente determinada quando o *valor numérico* de todos os deslocamentos nodais e todas as descontinuidades independentes são conhecidas. Ao ser cinematicamente determinada os esforços podem ser imediatamente obtidos através das tabelas dos elementos-base, porque estas tabelas fornecem esforços, reacções, deslocamentos dependentes em função dos deslocamentos nodais independentes (e descontinuidades independentes).

O método dos deslocamentos consiste, numa primeira fase, em transformar a estrutura *dada* (ou *original*) numa fundamental, bloqueando todos os deslocamentos e descontinuidades independentes. De seguida sujeita-se a estrutura fundamental às cargas de vão. A estrutura fundamental assim carregada é: (i) cinematicamente **determinada** (porque os valores numéricos dos deslocamentos nodais independentes são conhecidos, embora sejam nulos !... ), (ii) **desequilibrada**, porque não existe equilíbrio estático nos nós (em geral) e além disso deixa de existir interacção de esforços (internos) entre as barras porque os seus nós estão bloqueados por ligações fictícias ao exterior como se mostra no nó B da figura 3.1. Esta ligação exterior fictícia transmite para o exterior o momento **desequilibrado**  $\Delta M$ , que é a diferença entre os momentos das secções 2 e 3, e que se designa por **força de fixação nodal** ao exterior (neste caso **Q<sub>10</sub>**).

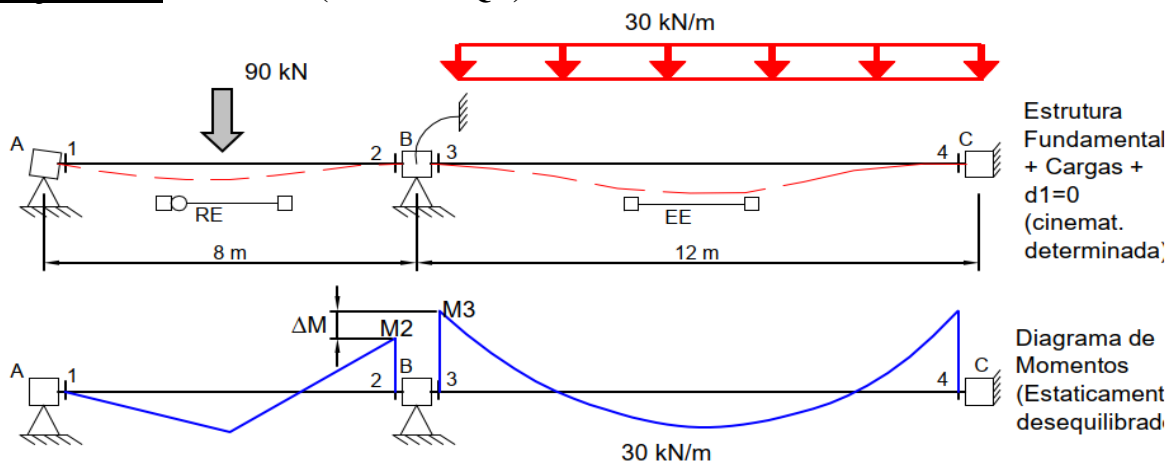


Figura 3.1 -Estrutura cinematicamente determinada (rotação do nó B =0) mas não equilibrada ( $\Delta M \neq 0$ , há desequilíbrio entre as secções 2 e 3).

Numa segunda fase do Método, faz-se a libertação do vínculo ao exterior no nó B. Este nó rodará no sentido contrário à força de fixação, de um valor ( $d_1$ ) *suficiente* para se atingir o equilíbrio da

estrutura, ou seja,  $\Delta M$  ficará nulo. A estrutura tornar-se-á, também, cinematicamente determinada porque se passa a conhecer o *valor numérico* de  $d_1$  (agora diferente de zero!... como seria esperado.)

O **objectivo** imediato do Método dos Deslocamentos é de facto a "*resolução da indeterminação cinemática da estrutura*", ou seja, o cálculo do valor dos  $\beta$  deslocamentos nodais independentes ( $d_i$ ) (também designados por *incógnitas primárias*), o que se obriga à resolução de um sistema de equações algébricas com  $\beta$  incógnitas. Aplicando o princípio da sobreposição de efeitos às diversas fases do método, determinam-se as *incógnitas secundárias*, que são os esforços, reacções e os deslocamentos dependentes.

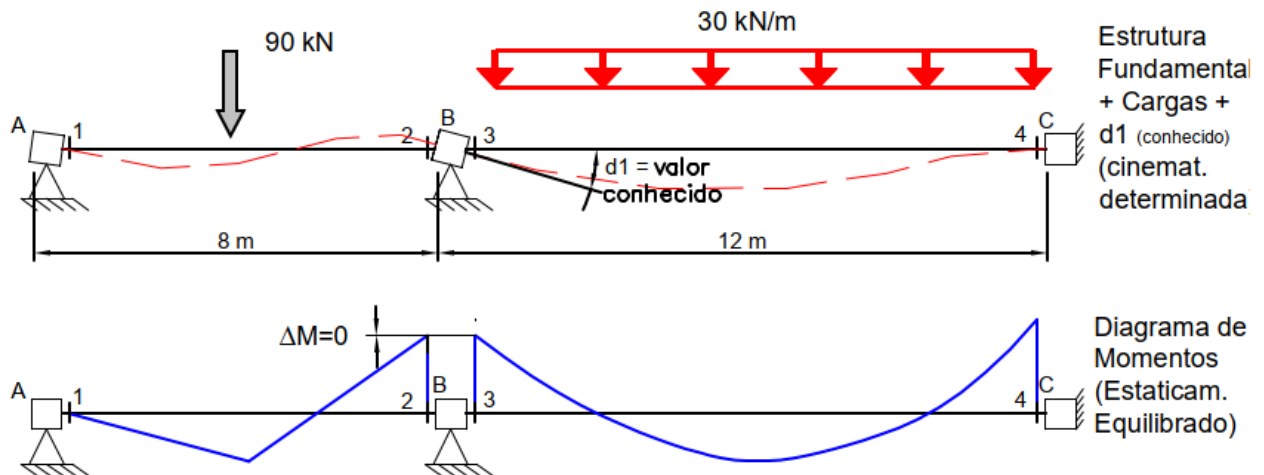


Figura 3.2 -Estrutura cinematicamente determinada e Equilibrada

Exemplifica-se a fundamentação do método dos deslocamentos comentando nas figuras seguintes.

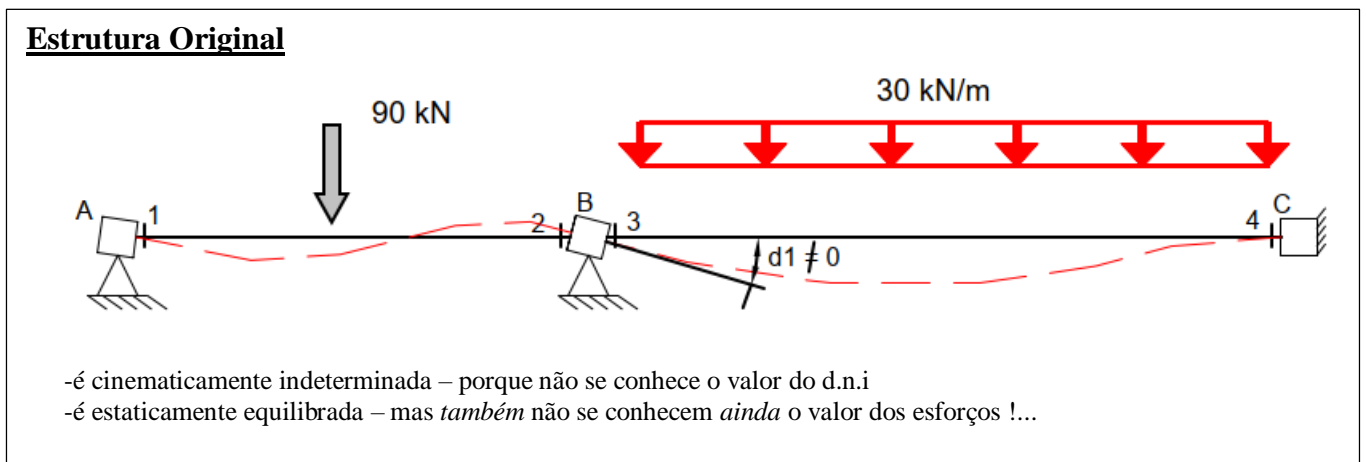
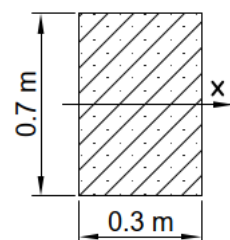


Figura 3.3- Estrutura Original

Características materiais e mecânicas da secção das barras:

$$E = 30 \text{ GPa} ; I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0.3 \cdot 0.7^3}{12} = 8.575 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 ;$$

Rigidez de flexão da secção:  $EI = 257\,250 \text{ kNm}^2$ .



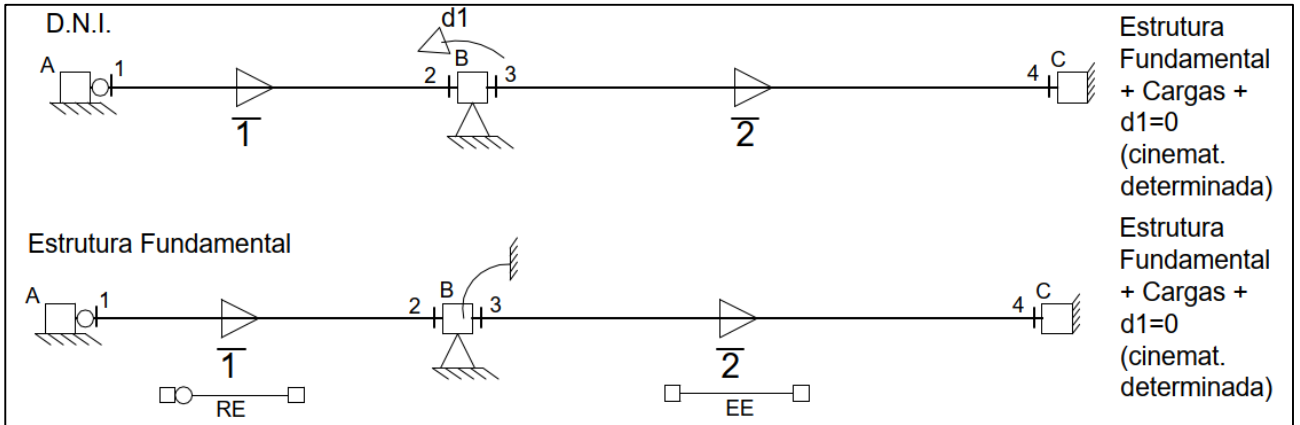


Figura 3.4- Deslocamento nodal independente,  $d_1$ , e Estrutura Fundamental

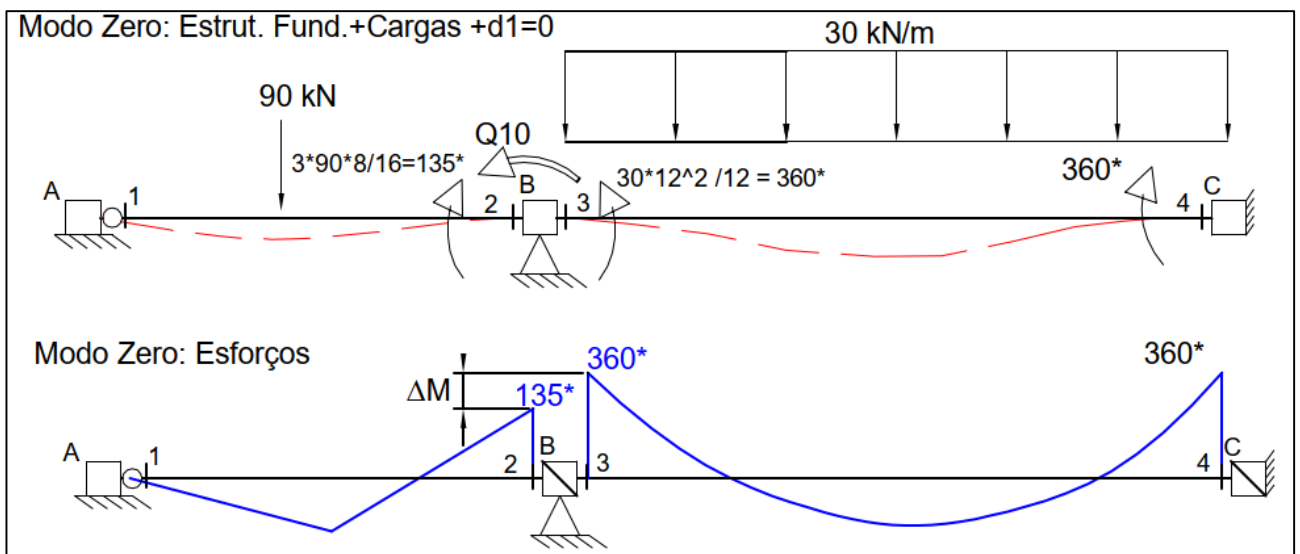
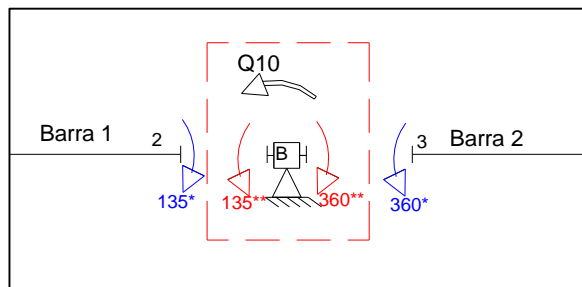


Figura 3.5- Modo Zero

Por equilíbrio do nó 2 no Modo Zero calcula-se a **Força Nodal de Fixação** das **Cargas de Vão**

( $Q_{10}$ ).



$$Q_{10} = 360^{**} - 135^{**} = 360^* + (-135^*) = 225 = \Delta M$$

**Força Nodal de Fixação**

**Esforços de Fixação nas secções das barras**

- o sentido (+) das forças de fixação é o sentido (+) do d.n.i ( $d_1$ )

- o sentido (+) dos esforços de fixação é o sentido (+) dos esforços (Res. Materiais)

Figura 3.6- Equilíbrio no nó B

**A Força Nodal de Fixação segundo o d.n.i. "i", num determinado nó, é igual à soma dos esforços de fixação nas secções adjacentes ao nó segundo o sentido positivo do d.n.i. "i".**

No caso presente, a força desequilibrada é  $Q_{10} = \Delta M = 225 \text{ kNm}$ , positiva, e por isso no sentido de  $(+d_1)$ , sentido antihorário. Ao libertar-se o nó, ele rodará no sentido horário, numa *quantidade* (valor) que depende da rigidez de rotação do nó (ou seja de  $K_{11}$ ).

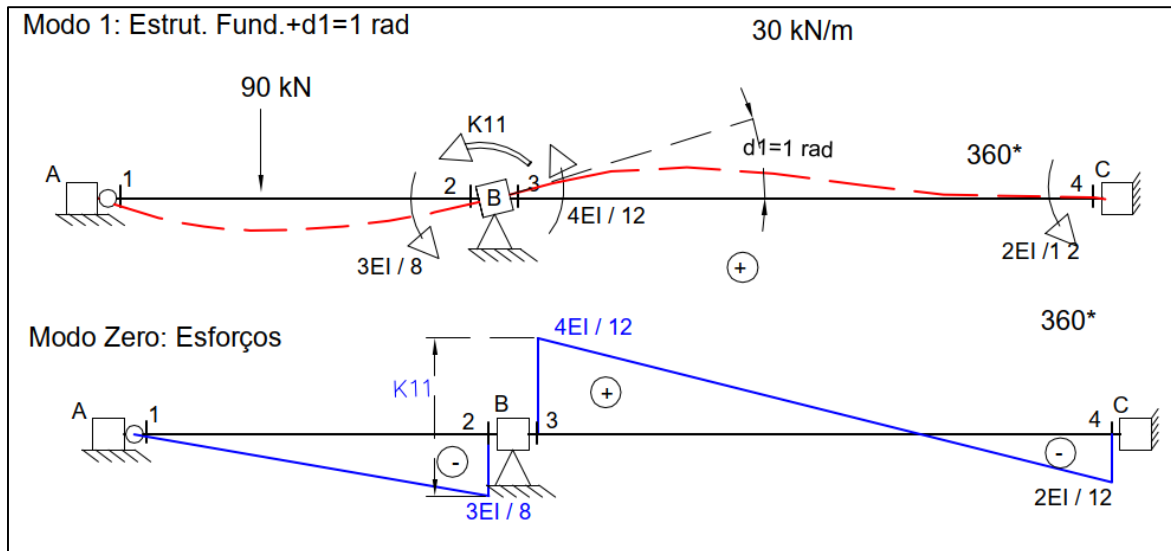


Figura 3.7- Modo de deformação 1

A Força Nodal de Fixação  $K_{11}$ , associada a uma rotação unitária e imposta ( $d_1=1$ ), é:

$$K_{11} = \frac{4EI}{12} + \frac{3EI}{8} = 182\,217.75 \text{ kN/m}$$

Realiza-se finalmente o equilíbrio no nó B, pela sobreposição de forças nodais de todos os modos:

Equação de equilíbrio no nó 2:

$$Q_{10} + K_{11} * d_1 = 0 \rightarrow 225 + 182218.75 * d_1 = 0 \rightarrow d_1 = -1.23 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Resolvendo a equação determina-se o valor real do deslocamento generalizado, ficando resolvida a "indeterminação cinemática do problema".

Os esforços finais são agora obtidos pela sobreposição de efeitos de esforços dos diversos Modos de Deformação, 0 e 1:

$$[\text{Momentos Finais}] = [\text{Momentos Modo 0}] + [\text{Momentos Modo 1}] * d_1$$

Vectorialmente fica:  $\{X\} = \{X_0\} + \{E_1\} * d_1$

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{20} \\ X_{30} \\ X_{40} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{21} \\ E_{31} \\ E_{41} \end{bmatrix} * d_1$$

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -135 \\ -360 \\ -360 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3EI}{8} \\ -4EI \\ \frac{12}{2EI} \\ \frac{12}{12} \end{bmatrix} * (-1.23 * 10^{-3}) = \begin{Bmatrix} -254 \\ -254 \\ -413 \end{Bmatrix}$$

Momentos Finais na Estrutura Original

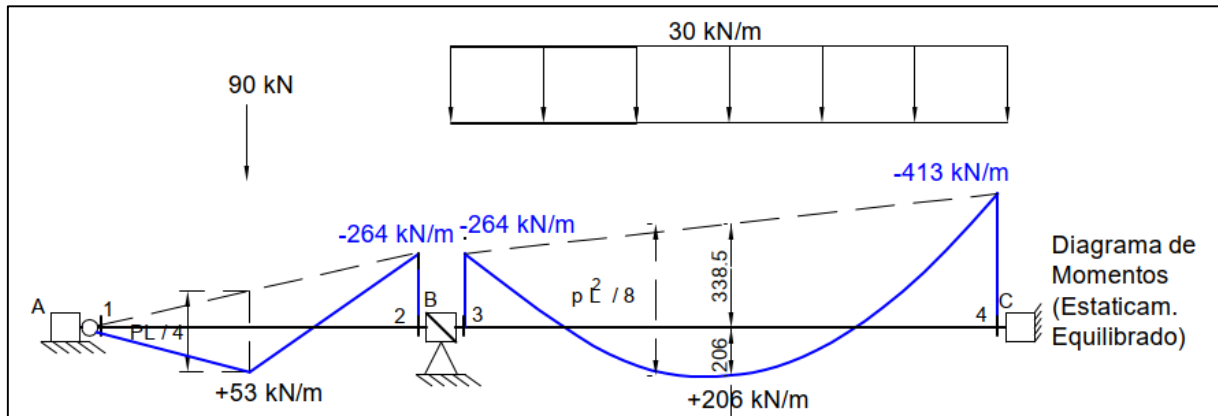


Figura 3.8- Momentos Finais

- O diagrama de momentos final está equilibrado. A estrutura é também cinematicamente determinada porque em qualquer ponto da viga pode ser determinada a flecha ou rotação fazendo recurso às equações de sobreposição de efeitos para flechas ou rotações.

No final, a estrutura é estaticamente equilibrada e cinematicamente determinada.



### 3.2- Equação do Método dos Deslocamentos

Vamos resolver a estrutura seguinte.

#### Estrutura Dada (Original)

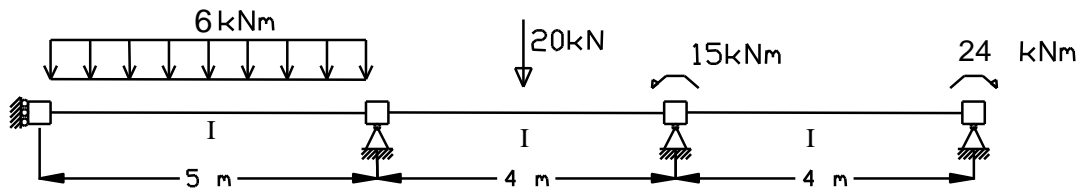


Figura 3.3

No Método dos Deslocamentos substituímos a estrutura *dada* (ou *original*), que é como sabemos cinematicamente indeterminada, por outra constituída por elementos base, e que se designa por estrutura *fundamental* (ou estrutura *base*). A estrutura fundamental obtém-se da estrutura dada pelo bloqueamento dos deslocamentos nodais considerados independentes, anulando-os, o que a torna (temporariamente) numa estrutura cinematicamente determinada.

Considerámos aqui como deslocamentos nodais independentes as rotações dos nós 2 e 3 (denotados por  $d_1$  e  $d_2$  respectivamente). O seu bloqueamento converte a estrutura dada numa estrutura fundamental constituída pelos seguintes tipos de barra:

- (i) barra 1: barra com libertação de esforço transversal à esquerda e encastrada à direita,
- (ii) barra 2: barra encastrada-encastrada, e,
- (iii) barra 3: barra encastrada-rotulada.

Na terceira barra transferiu-se a rótula externa do apoio, para o interior da barra porque tal não altera as suas características de comportamento desta. O momento actuante de 24 kN.m que actuava directamente sobre o nó 4 passa a actuar na secção nº 6.

#### Discretização

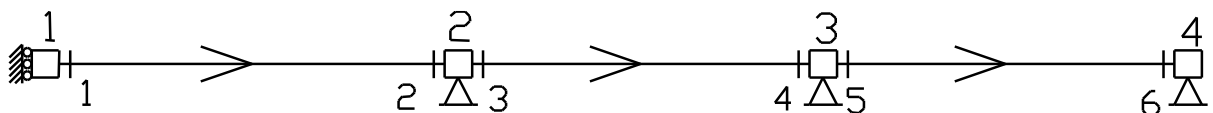


Figura 3.4

#### Deslocamentos Nodais Independentes

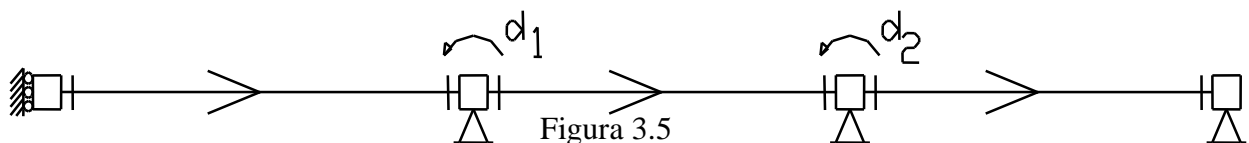


Figura 3.5

### Estrutura Fundamental

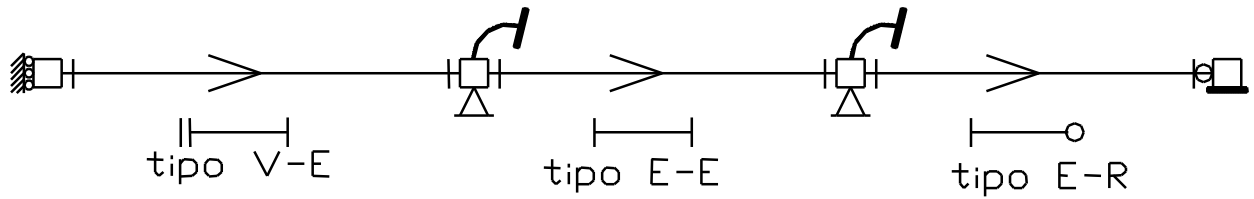


Figura 3.6

As cargas actuantes são subdivididas em dois conjuntos:

(i) Cargas Nodais - as que actuam nos nós e segundo os deslocamentos nodais independentes (\*).

Exemplo: +15 kN.m

(ii) Cargas de Vão - as restantes acções. Exemplo: 6.0 kN.m, 20 kN, e 24 kN.m

(O momento 24 kNm é "carga de vão" pois não actua segundo um deslocamento nodal independente)

As cargas nodais agrupam-se no *vector de forças nodais aplicadas* :  $\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +15 \end{Bmatrix}$  (3.1)

Determinamos agora as forças nodais de fixação associadas às cargas de vão e que constituirão o vector  $\{Q_0\}$ .

*Nota: Mais tarde iremos redefinir como **Forças Nodais** como sendo iguais ao **trabalho** efectuado por todas as cargas aplicadas nos nós quando se mobiliza cada um dos **modos** de deformação.*

**Modo "Zero":** Estr. Fundam. + Cargas +  $d_1=0$  e  $d_2=0$ .

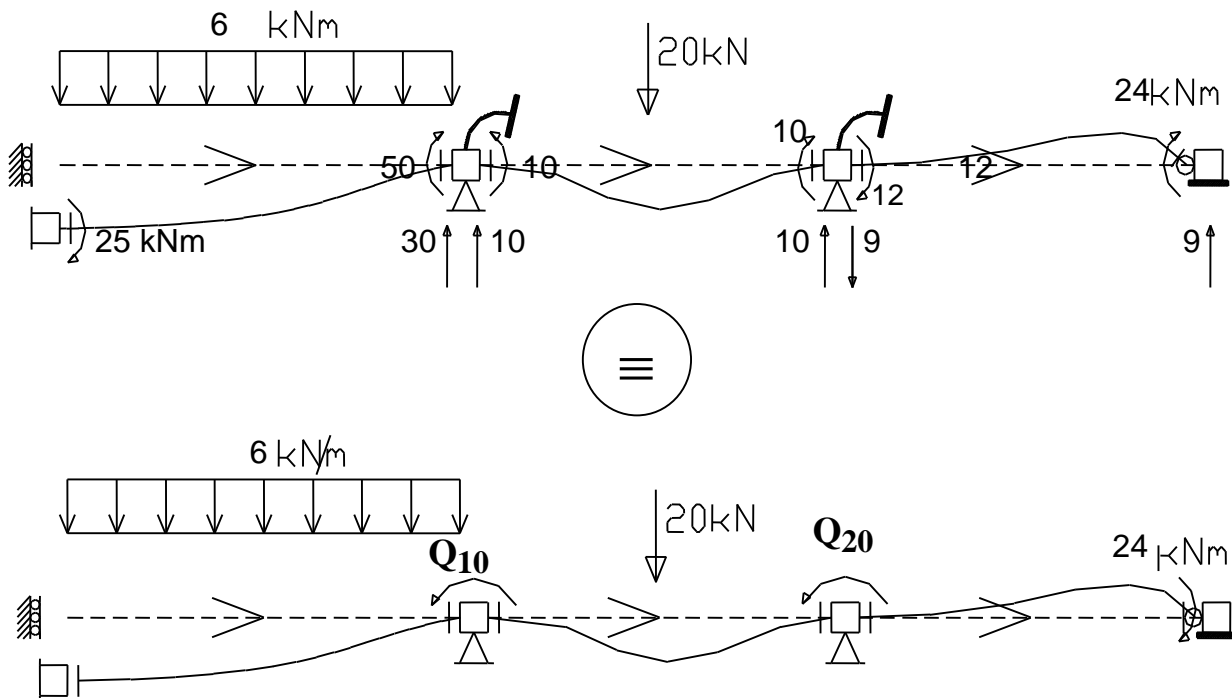


Figura 3.7- Modo "Zero"

As forças nodais  $\{Q_0\}$  são *forças de fixação* que mantêm os deslocamentos nodais independentes

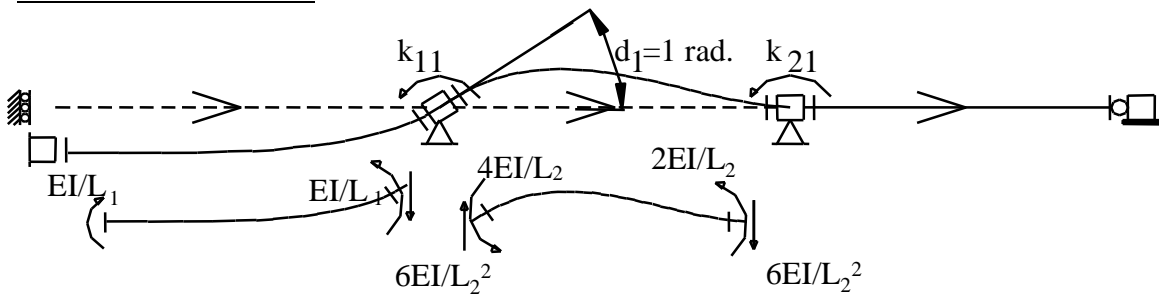
nulos  $\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ , quando actua a carga de vão. Neste caso valem  $\{Q_0\} = \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40 \\ -22 \end{Bmatrix}$ .

Na verdade a estrutura acabada de obter não é estaticamente equivalente à estrutura original porque

as forças nodais valem  $\begin{Bmatrix} -40 \\ -22 \end{Bmatrix}$  quando inicialmente valiam  $\begin{Bmatrix} 0 \\ +15 \end{Bmatrix}$ . Para se obter equivalência

estática há que impor em sobreposição às acções de vão os deslocamentos nodais  $\{d_i\}$ . Para tanto faremos actuar tais deslocamentos separadamente. A cada caso corresponderá um modo de deformação distinto.

**1º Modo de Deformação:** Estr. Fundam. +  $d_1=1, d_2=0$



**2º Modo de Deformação:** Estr. Fundam. +  $d_1=0, d_2=1$

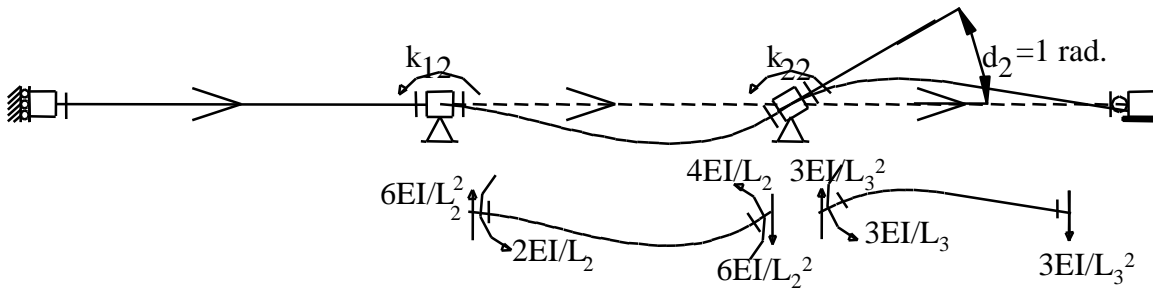


Figura 3.8 - 1º e 2º modo de deformação.

As forças nodais necessárias aplicar à estrutura para manter os deslocamentos nodais com o valor de  $d_1$  e  $d_2$  são  $\{Q_c\}$  (a letra "c" significa *complementar* de solução *complementar*) e valem:

$$\{Q_c\} = \begin{Bmatrix} Q_{1c} \\ Q_{2c} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2}\right) * d_1 + \frac{2EI}{L_2} * d_2 \\ \frac{2EI}{L_2} * d_1 + \left(\frac{4EI}{L_2} + \frac{3EI}{L_3}\right) * d_2 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

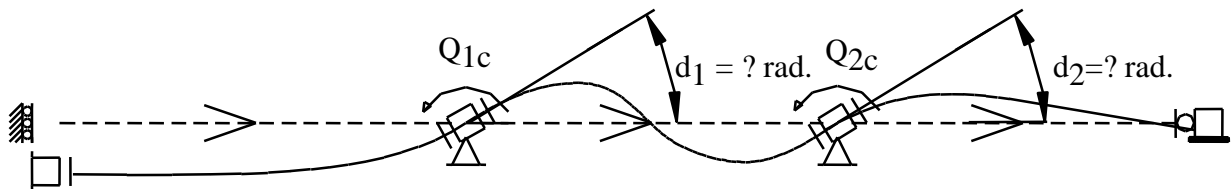


Figura 3.9 - Solução complementar

Para haver equilíbrio estático as forças nodais  $\{Q\}$  finais serão:

$$\{Q_C\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{EI}{5} + \frac{4EI}{4} & \frac{2EI}{4} \\ \frac{2EI}{4} & \frac{4EI}{4} + \frac{3EI}{4} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -40 \\ -22 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 15 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (3.3.a)$$

$$[K] * \{d\} + \{Q_0\} = \{Q\}$$

(3.3.b)

que é uma equação matricial (sistema de equações) de equilíbrio de forças, designada por Equação do Método dos Deslocamentos.

A resolução do referido sistema permite calcular os deslocamentos nodais independentes, que para a rigidez de flexão  $EI = 37500 \text{ kNm}^2$ , vale:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +0.743 \\ +0.352 \end{Bmatrix} * 10^{-3} \text{ rad.}$$

Seguem-se as seguintes definições:

- O coeficiente  $Q_i$  do vector de forças aplicadas  $\{Q\}$ , representa a força aplicada da direcção do deslocamento nodal independente  $d_i$ .
- O coeficiente  $Q_{i0}$  do vector de forças de fixação  $\{Q_0\}$ , representa a força de fixação nodal na direcção de  $d_i$ , que é necessário aplicar à estrutura, quando ela é sujeita à solicitação de vão e se mantêm nulos todos os deslocamentos nodais independentes  $\{d\} = \{0\}$ .
- O coeficiente  $k_{ij}$  da matriz de rigidez  $[K]$ , representa a força nodal de fixação que é necessário aplicar à estrutura no sentido do deslocamento nodal independente  $d_i$ , quando nela se impõe o deslocamento nodal independente  $d_j = 1$  e se mantêm nulos todos os restantes deslocamentos nodais independentes e solicitação de vão.

### 3.1.1- Propriedades da Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez  $[K]$  de uma estrutura apoiada (\*):

- (i) é quadrada com dimensão igual ao grau de indeterminação cinemática da estrutura  $\beta$ ;
- (ii) é positiva definida, isto é,  $K_{ii} > 0$
- (iii) é simétrica, ou seja,  $K_{ij} = K_{ji}$
- (iv) é não singular (ou regular), isto é,  $\det[K] \neq 0$ , e por isso admite inversa.

(consequentemente é verdadeira a igualdade:  $[K]^{-1} * [K]^T = [I]$  )

Nota(\*): Em Teoria de Estruturas também se pode definir a matriz de rigidez para de uma estrutura livre de apoios, ou seja, sem apoios. Neste caso a matriz é singular,  $\det[K]=0$ .

## 3.2- Cálculo de Esforços, Reacções de Apoio e de Deslocamentos Dependentes

### 3.2.1-Cálculo de esforços

O cálculo de esforços é realizado aplicando o princípio da sobreposição de efeitos aos esforços independentes de cada barra, representado pela expressão

$$\boxed{\{X\} = [E] * \{d\} + \{X_0\}} \quad (3.4)$$

- O vector  $\{X_0\}$  representa os esforços independentes que se instalam na estrutura quando ela é sujeita à acção de vão, e se mantêm nulos todos os deslocamentos nodais independentes ( $\{d\}=\{0\}$ ), ou de outra forma,
- O vector  $\{X_0\}$  representa os esforços independentes que se instalam na estrutura fundamental quando ela é sujeita à acção de vão.
- A coluna  $j$  da matriz  $[E]$  representa os esforços independentes no modo  $j$ .  $E_{sj}$ , é um elemento da *matriz de esforços*  $[E]$  e representa o esforço na secção  $s$  no modo  $j$ . O número de colunas de  $[E]$  é igual ao número de modos.

Como vimos anteriormente o vector  $\{X\}$  era constituído pelos esforços independentes de todas as barras, ou seja:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \{X_1\} \\ \{X_2\} \\ \dots \\ \{X_m\} \end{Bmatrix}, \text{ sendo } \{X_m\} = \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ N_j \end{Bmatrix} \text{ os esforços independentes da barra } m.$$

Se o cálculo for efectuado manualmente é conveniente reduzir a dimensão deste vector para reduzir trabalho. No caso de cargas presente não há esforços axiais, e por isso, por cada barra bastam apenas os momentos  $\{X_m\}^T = \{M_i, M_j\}$ , devendo escrever-se então  $\{X\}_{\text{adopt}}$  (adopt. de *adoptado*). Os esforços transversos finais serão determinados a partir dos momentos finais, por equilíbrio de cada barra. O número de elementos de  $\{X\}$  é igual ao número de elementos de  $\{X_0\}$  e ao número de linhas de  $[E]$ .

No caso do problema apresentado e atendendo ao que se afirmou no parágrafo anterior a equação de sobreposição de efeitos para esforços,  $\{X\} = [E] * \{d\} + \{X_0\}$ , vale:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 1/5 & 0 \\ -4/4 & -2/4 \\ 2/4 & 4/4 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix} * EI * \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 25 \\ -50 \\ -10 \\ -10 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +30.6 \text{ kNm} \\ -44.4 \text{ kNm} \\ -44.4 \text{ kNm} \\ +17.1 \text{ kNm} \\ +2.1 \text{ kNm} \end{Bmatrix}$$

Os esforços obtidos representam a parcela hiperestática. Sobrepondo a parcela isostática, função das acções de vão, obtemos o diagrama de momentos finais, como se mostra na figura seguinte. Relembramos que os momentos hiperestáticos das secções extremas das barras são iguais aos momentos finais nessas secções.

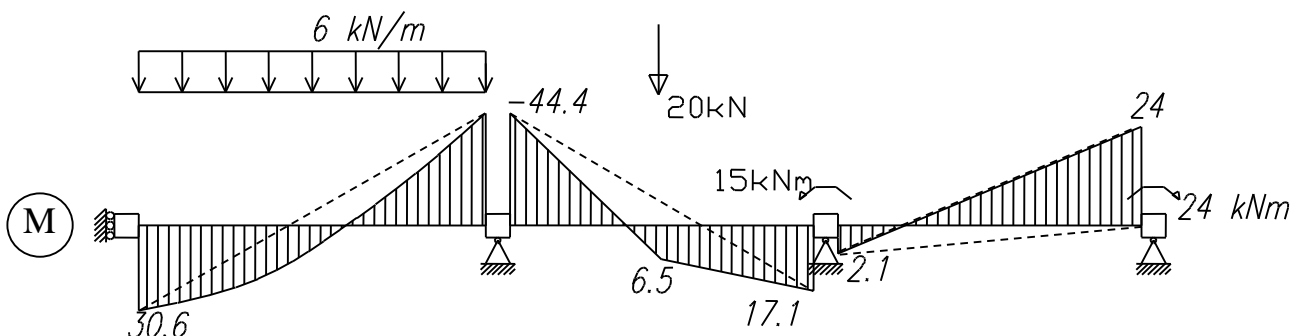


Figura 3.10 - Diagrama de momentos finais.

## 3.2.2 - Cálculo de Reacções de Apoio

O cálculo das reacções de apoio é efectuado da mesma forma que os esforços aplicando novamente o Princípio da Sobreposição de Efeitos, e é representado pela expressão:

$$\boxed{\{R\} = [A] * \{d\} + \{R_0\}} \quad (3.5)$$

- O vector  $\{R_0\}$  representa as reacções que se desenvolvem nos apoios da estrutura fundamental quando ela é sujeita à acção de vão.
- A coluna  $i$  da matriz  $[A]$  representa as reacções que se desenvolvem nos apoios da estrutura, quando nela se impõe o deslocamento nodal independente  $d_i=1$  e se mantêm nulos todos os restantes ( $d_j=0$ , com  $i \neq j$ )

Exemplo: Calcule a reacção vertical no apoio do nó 2,  $R_2$  e o momento de encastramento no nó 1,  $R_1$ .

- Vamos arbitrar como sentidos positivos, o de baixo para cima no caso de  $R_2$ , e, a rotação em sentido horário para o caso de  $R_1$ .

- Cálculo de  $\{R_0\}$ . Recorrendo à figura 3.7 podemos ler :  $\{R_0\} = \begin{Bmatrix} R_{10} \\ R_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25\text{kNm} \\ 30+10\text{kN} \end{Bmatrix}$

- Cálculo de  $[A]$ .

Do 1º modo de deformação, figura 3.8, escrevemos:  $\{A_1\} = \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{EI}{L_1} \\ 0 + \frac{6EI}{L_2^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7500 \\ 14062.5 \end{Bmatrix}$

Igualmente do 2º modo, teremos:  $\{A_2\} = \begin{Bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6EI}{L_2^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 14062.5 \end{Bmatrix}$ . Como  $\{d\}$  já é conhecido

aplicamos a equação 3.5:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 7500 & 0 \\ 14062.5 & 14062.5 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 25 \\ 40 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30.6\text{kNm} \\ 55.4\text{kN} \end{Bmatrix}$$

Como seria de esperar  $R_1$  vale o mesmo que  $M_1$ .



### 3.2.3 - Cálculo de Deslocamentos Dependentes

Mais uma vez se recorre ao Princípio da Sobreposição de Efeitos para a quantificação dos deslocamentos nodais **dependentes**, e que é escrito na forma:

$$\{d_d\} = [D] * \{d\} + \{d_0\} \quad (3.6)$$

- O vector  $\{d_0\}$  representa os deslocamentos dependentes que se manifestam na estrutura fundamental quando ela é sujeita à acção de vão.
- O coeficiente  $D_{ij}$  da matriz  $[D]$  é o deslocamento dependente  $i$  quando se impõe o deslocamento nodal independente  $d_j=1$  à estrutura e se mantêm nulos todos os restantes ( $d_j=0$ , com  $i \neq j$ ).

Nota: Para calcular deslocamentos dependentes poderíamos em alternativa recorrer ao método da carga unitária (ver Análise de Estruturas I), que, para barras deformáveis axialmente e por flexão se escreve:

$$\delta = \sum_{\text{barras}} \left\{ \int_0^{L_i} \frac{NN}{EA} dx + \int_0^{L_i} \frac{MM}{EI} dx \right\} \quad (3.7)$$

sendo  $M$  e  $N$  os momentos e esforços axiais finais da estrutura original devido às acções reais, e  $\bar{M}$  e  $\bar{N}$  os esforços associados à carga unitária aplicada no sentido do deslocamento que se pretende quantificar. A carga unitária é aplicada em princípio à estrutura original, estendendo-se a integração por todas as barras desta. Iriamos obter o deslocamento total em relativo à posição de repouso (inicial) da estrutura. Contudo, se usar uma subestrutura isostática para calcular os esforços unitários, o valor dos integrais são os deslocamentos em relação corda de cada barra (segmento de recta que une os nós extremos da barra).

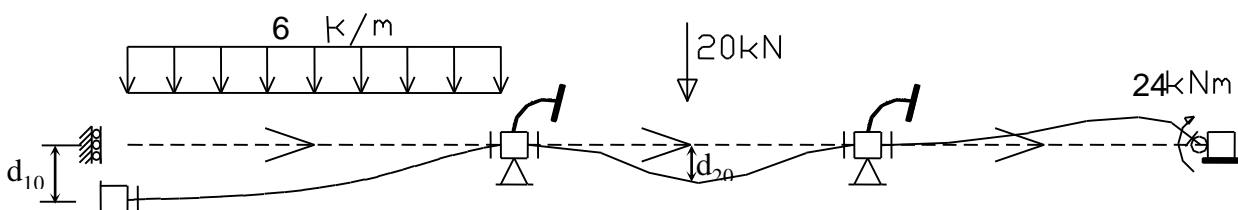
**Exemplo:** Calcule o deslocamento vertical do nó 1 e a flecha sob a carga de 20 kN na segunda barra.

- Vamos arbitrar como sentidos positivos os deslocamentos o de cima para baixo, em ambos os casos, e designá-los respectivamente por  $d_{d1}$  e  $d_{d2}$ .

**Modo Zero:**

- Cálculo de  $\{d_0\}$ . Consultando as tabelas de elementos base com acções de vão teremos :

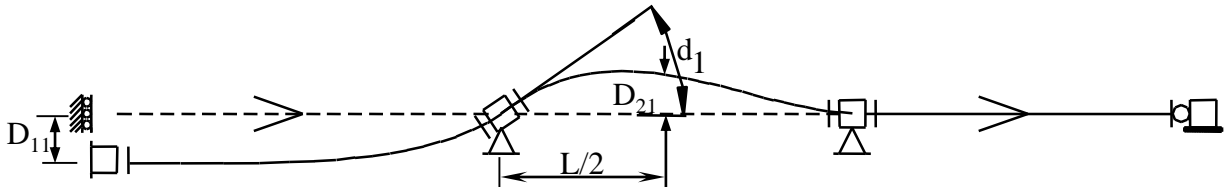
$$\{d_0\} = \begin{Bmatrix} d_{10} \\ d_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{gL^4}{24EI} \\ \frac{PL^3}{192EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{156.25}{EI} \\ \frac{6.667}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.17 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 0.177 \times 10^{-3} \text{ m} \end{Bmatrix}$$



-Cálculo de [D].

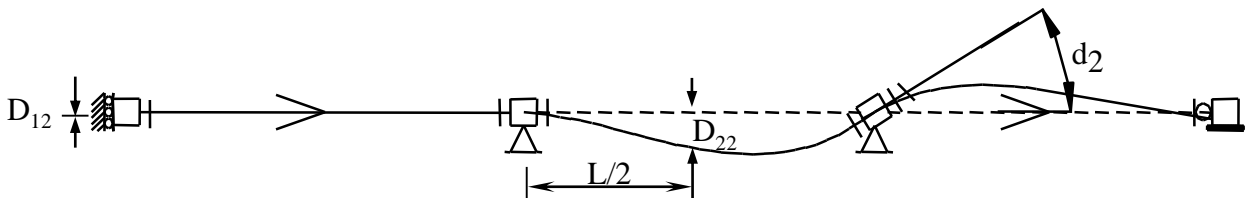
Do 1º modo de deformação, e atendendo às tabelas dos elementos base sujeitos a deslocamentos nodais impostos temos:

$$\{D_1\} = \begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L_1}{2} \\ -\left(\frac{L_2}{2}\right) + \frac{2}{L_2} * \left(\frac{L_2}{2}\right)^2 - \frac{1}{L_2^2} * \left(\frac{L_2}{2}\right)^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.5 \text{ m/rad} \\ -0.625 \text{ m/rad} \end{Bmatrix}$$



Do 2º modo, obteremos:

$$\{D_2\} = \begin{Bmatrix} D_{12} \\ D_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +\left(\frac{L_2}{2}\right) - \frac{2}{L_2} * \left(\frac{L_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{L_2^2} * \left(\frac{L_2}{2}\right)^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ m/rad} \\ 0.625 \text{ m/rad} \end{Bmatrix}.$$



Da equação de sobreposição de efeitos para deslocamentos dependentes (equação 3.6), e como os deslocamentos nodais independentes {d} já são conhecidos, obtemos:

$$\begin{Bmatrix} d_{d1} \\ d_{d2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ -0.625 & 0.625 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4.17 \times 10^{-3} \\ 0.177 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.25 \times 10^{-3} \text{ m} \\ -0.067 \times 10^{-3} \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Verifica-se que o nó 1 desce mas que o ponto de aplicação da carga de 20 kN sobe.

3.3 - Procedimento prático para o cálculo manual.**Método dos Deslocamentos**

- Passo 1 : Discretizar a estrutura (numerar e orientar as barras, numerar as secções críticas) e escolher os esforços que fazem parte do vector de esforços independentes,  $\{\mathbf{X}\}$  (ou  $\{\mathbf{X}\}_{\text{adoptado}}$ )
- Passo 2: Identificar os deslocamentos nodais independentes,  $\{\mathbf{d}\}$ , determinar o grau de indeterminação cinemática  $\beta$ , identificar dos elementos base (ou tipo) e desenhar a estrutura fundamental.
- Passo 3: Calcular a matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$ , a matriz de esforços  $[\mathbf{E}]$ , a de deslocamentos  $[\mathbf{D}]$  e a de reacções de apoio  $[\mathbf{A}]$ .
- Passo 4: Para **cada solicitação** calcular as forças de fixação  $\{\mathbf{Q}_0\}$ , os esforços  $\{\mathbf{X}_0\}$ , os deslocamentos dependentes  $\{\mathbf{d}_0\}$ , e as reacções  $\{\mathbf{R}_0\}$ .
- Passo 5: Para **cada solicitação** definir o vector de **forças** nodais  $\{\mathbf{Q}\}$
- Passo 6: Para **cada solicitação** calcular os deslocamentos  $\{\mathbf{d}\}$  fazendo uso da Equação do Método dos Deslocamentos.

$$[\mathbf{K}] * \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{Q}_0\} = \{\mathbf{Q}\} \quad (3.3)$$

- Passo 7: Para **cada solicitação** calcular:

- esforços finais:  $\{\mathbf{X}\} = [\mathbf{E}] * \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{X}_0\} \quad (3.4)$

- reacções de apoio:  $\{\mathbf{R}\} = [\mathbf{A}] * \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{R}_0\} \quad (3.5)$

- deslocamentos dependentes:  $\{\mathbf{d}_d\} = [\mathbf{D}] * \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{d}_0\} \quad (3.6)$

- 
- $\{\mathbf{d}\}$  : Vector de deslocamentos nodais considerados independentes.
- $[\mathbf{K}]$  : Matriz de rigidez da estrutura fundamental associada aos deslocamentos nodais.
- $[\mathbf{E}]$  : Matriz de esforços considerados independentes e associados a cada modo de deformação. A coluna  $j$  de  $[\mathbf{E}]$  são os esforços independentes no modo  $j$ .
- $\{\mathbf{Q}_0\}$  : Vector de forças nodais de fixação dos deslocamentos independentes devidas às acções de vão.
- $\{\mathbf{X}_0\}$  : Vector dos esforços de fixação devido às acções de vão (é conveniente que estejam definidos de acordo com o referencial de esforços da resistência de materiais)
- $\{\mathbf{Q}\}$  : Vector de forças nodais actuantes no sentido dos deslocamentos nodais

### 3.4 - Assentamentos de Apoio

Uma estrutura apresenta um assentamento de apoio quando há deformação plástica permanente do solo exterior confinante ao nó de apoio. O assentamento de apoio pode ser entendido, na análise estrutural, como um deslocamento nodal imposto a um nó exterior da estrutura.

Pode ser tratado por duas vias. Na primeira considera-se que a estrutura passa a ter mais um grau de liberdade adicional mas cujo deslocamento é conhecido e imposto. Na segunda trata-se o assentamento como acção exterior que reflecte o deslocamento do nó de apoio em questão. Vejamos em pormenor cada uma das situações.

#### 3.4.1 – Assentamento de apoio tratado como grau de liberdade adicional de valor conhecido.

Imagine-se uma estrutura com  $n$  graus de liberdade. Nela pode estabelecer-se a equação de equilíbrio do método dos deslocamentos que terá  $n$  equações, sendo representada por:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix}, \quad \text{com} \quad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ \dots \\ Q_{n0} \end{Bmatrix} \quad (3.8-9)$$

Suponhamos que agora se manifesta um assentamento segundo certa direcção de um nó de apoio. Como este movimento surge num nó no sentido de uma restrição inicial é necessário desde já libertar esse vínculo ao exterior conferindo à estrutura mais um grau de liberdade. Surge assim mais uma equação de equilíbrio no sistema indicado em (3.8). Surgirá então mais uma coluna  $\{K_{ia}\}$  e uma linha  $\{k_{aj}\}$  na matriz rigidez associadas a este grau de liberdade, assim como mais um elemento nos vectores  $\{Q\}$  e  $\{Q_0\}$ , os elementos  $Q_a$  e  $Q_{a0}$ .

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} & k_{1a} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} & k_{2a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} & k_{na} \\ k_{a1} & k_{a2} & \dots & k_{an} & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \\ d_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \\ F_a \end{Bmatrix}, \quad \text{com} \quad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \\ F_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \\ Q_a \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ \dots \\ Q_{n0} \\ Q_{a0} \end{Bmatrix} \quad (3.10-11)$$

Porém, o deslocamento desse grau de liberdade é conhecido, que suponhamos ser de valor  $d_a$ . Não é de facto uma incógnita. Por isso em cada linha  $i$  do sistema podemos passar a parcela a ele respeitante  $\{k_{ia} \cdot d_a\}$  para o segundo termo, de onde se obterá:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \\ k_{a1} & k_{a2} & \dots & k_{an} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \dots \\ F'_n \\ F'_a \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \dots \\ F'_n \\ F'_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \\ F_a \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k_{1a} * d_a \\ k_{2a} * d_a \\ \dots \\ k_{na} * d_a \end{Bmatrix} \quad (3.12-13)$$

Trata-se de um sistema de  $n+1$  equações com  $n+1$ , das quais  $n$  são os deslocamentos  $d_1$  a  $d_n$  e ainda a reacção  $F'_a$ . Para resolver a indeterminação cinemática do problema basta-nos resolver o sistema das  $n$  primeiras equações com o vector de termos independentes alterado por (3.13), ou seja:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \dots \\ F'_n \end{Bmatrix}, \quad \text{com} \quad \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \dots \\ F'_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ \dots \\ Q_{n0} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k_{1a} * d_a \\ k_{2a} * d_a \\ \dots \\ k_{na} * d_a \end{Bmatrix} \quad (3.14-15)$$

O processo apresentado exige que se determinem os coeficientes da coluna  $a$  da matriz de rigidez,  $\{k_{ia}\}$ , dispensando no entanto a determinação de  $F'_a$ . Embora seja o processo adequado para implementar em cálculo automático é trabalhoso para o cálculo manual.

### 3.4.2 – Assentamento de apoio tratado como acção exterior.

O assentamento de apoio pode ser considerado como se fosse uma "acção de vão", sendo por isso tratado na "fase zero", ou seja, sobre a estrutura fundamental quando  $\{d\} = \{0\}$ .

Impõe-se o assentamento de apoio à estrutura fundamental, à priori conhecido, deformando-a mas respeitando as condições cinemáticas,  $\{d\}=\{0\}$ . Determinam-se a seguir as forças de fixação  $\{Q_0\}$  e os esforços de fixação  $\{X_0\}$ , e o resto do processo de cálculo prossegue como no caso das acções de vão.

Caso haja acções de vão (propriamente ditas) em simultâneo com um assentamento de apoio (o que é o caso mais realista!...) podem somar-se obviamente os vectores  $\{Q_0\}$  e  $\{X_0\}$  correspondentes a estas duas situações distintas, ou seja:

$$\begin{aligned} \{Q_0\}_{total} &= \{Q_0\}_{ac.v\tilde{a}o} + \{Q_0\}_{assentamento} \\ \{X_0\}_{total} &= \{X_0\}_{ac.v\tilde{a}o} + \{X_0\}_{assentamento} \end{aligned}$$

O processo de cálculo nos casos de barras axialmente deformáveis e de barras axialmente indeformáveis é semelhante. Apenas difere no facto de um e outro caso terem estruturas fundamentais distintas. Vamos ilustrar estas duas situações nos dois exemplos seguintes.

3.4.2.1 - Caso 1- Assentamento de apoio em estrutura com barras Axialmente Deformáveis

Exemplo: Determine os vectores  $\{Q_0\}$  e  $\{X_0\}$  supondo haver um assentamento vertical  $\delta$  em no nó C.

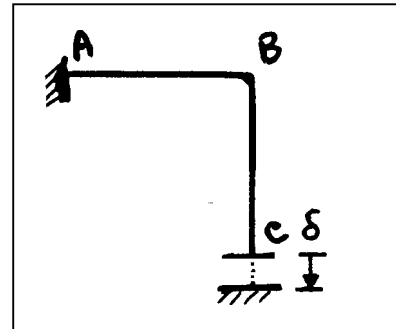
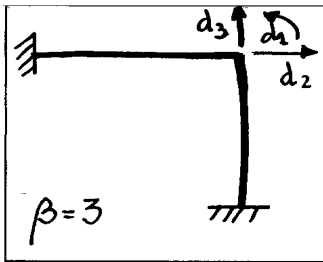


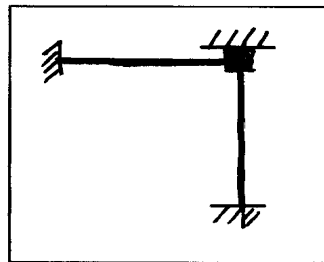
Figura 3.11

Resolução:

Deslocamentos Nodais Independentes



Estrutura Fundamental



Discretização

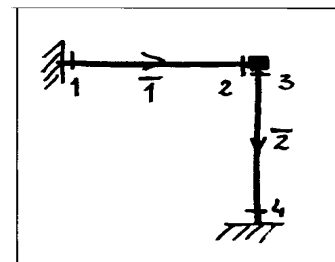


Figura 3.12

Fase zero : Vamos impôr o assentamento  $\delta$  e quantificar  $\{Q_0\}$  e  $\{X_0\}$

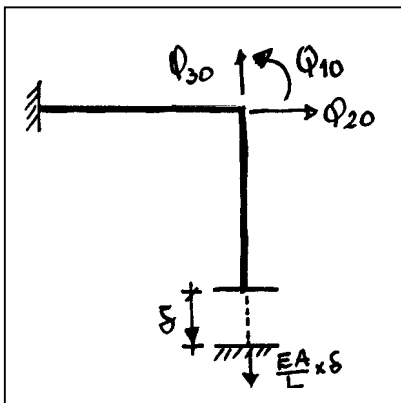


Figura 3.13

$$\{Q_0\} = \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ Q_{30} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{EA}{L} \delta \end{Bmatrix}, \{X_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ EA/L * \delta \end{Bmatrix}$$

3.4.2.2 - Caso 2- Assentamento de apoio em estrutura com barras Axialmente Indeformáveis

Exemplo: Determine os vectores  $\{Q_0\}$  e  $\{X_0\}$  para o exemplo 3.4.2.1 supondo que as barras são axialmente indeformáveis.

Resolução :

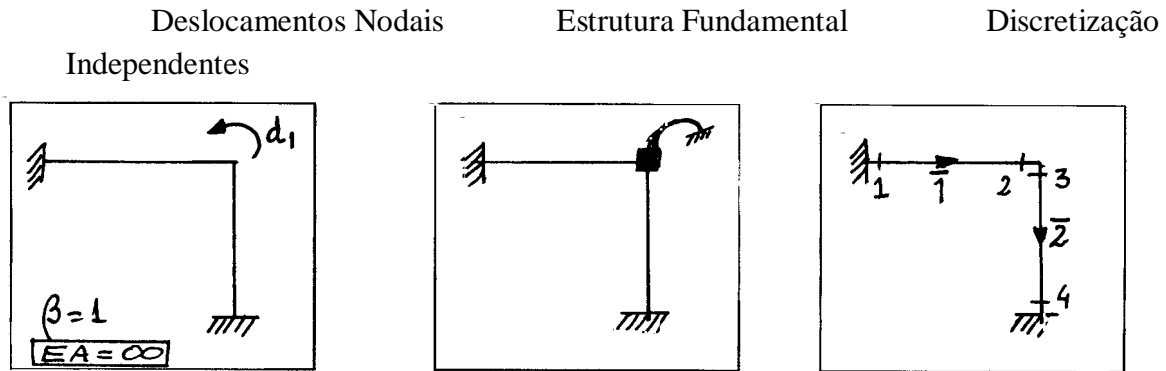


Figura 3.14

Devido à indeformabilidade axial das barras o grau de indeterminação cinemática vale agora  $\beta=1$ . Note-se que a estrutura fundamental também é diferente da do caso 1.

Fase zero : Impomos o assentamento  $\delta$  e quantificamos  $\{Q_0\}$  e  $\{X_0\}$  sobre a nova estrutura fundamental.

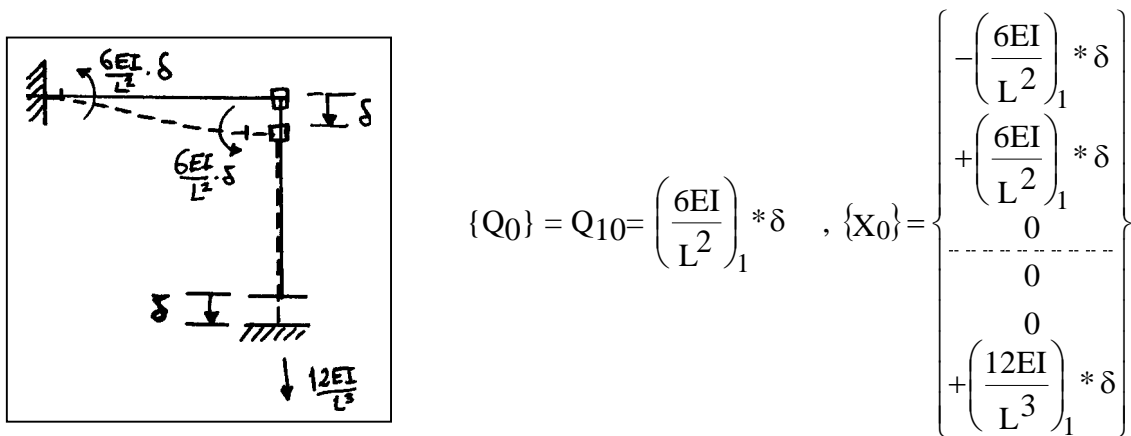


Figura 3.15

Quer em 3.4.2.1 como em 3.4.2.2 o resto dos cálculos (determinação de  $[K],[E],\{Q\}$ , etc.) processa-se normalmente, obviamente em coerência com a respectiva estrutura fundamental.

**Problema**

Determine os esforços finais na estrutura sujeita às acções de vão e à rotação de apoio de  $\theta_D=0.01745$  rad no sentido horário. As barras são axialmente indeformáveis ( $EA=\infty$ )

$EI=20 \times 10^3 \text{ kNm}^2$

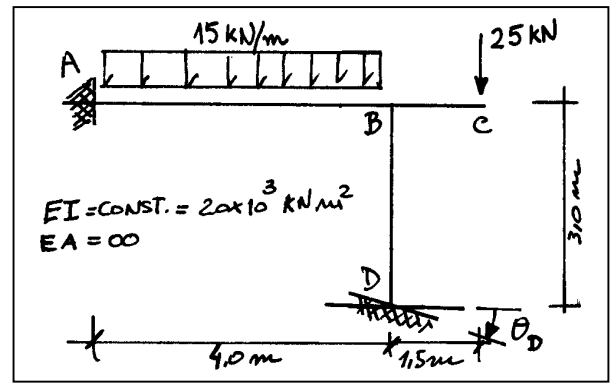


Figura 3.16

- Simplificação. Discretização. Estr. Fundamental e Grau de Indeterminação Cinemática.

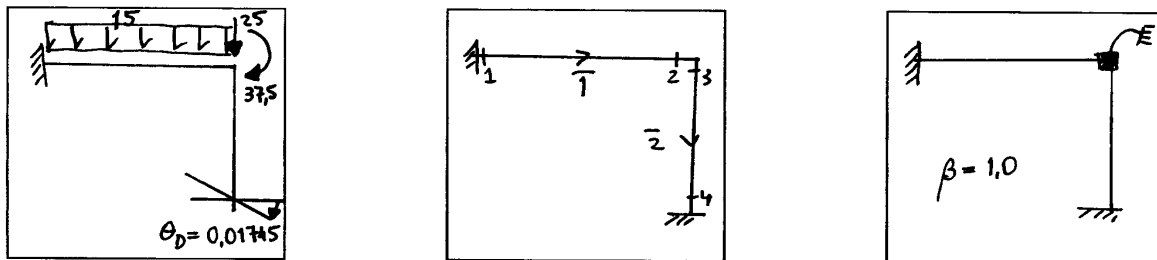


Figura 3.17

- Modo Zero:

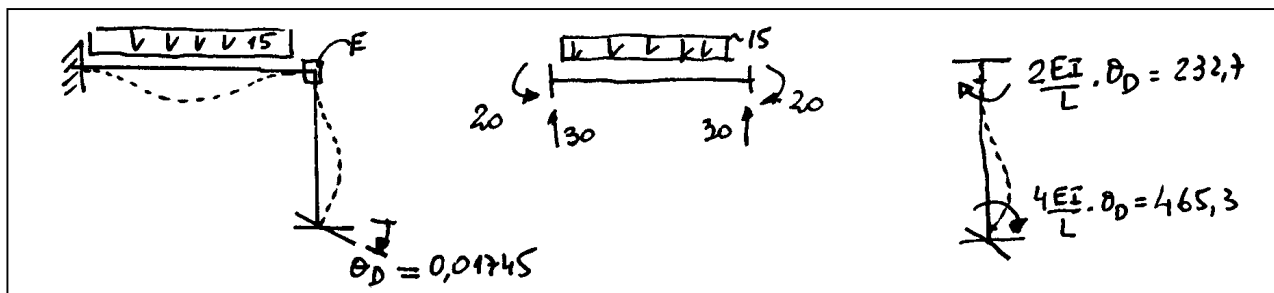


Figura 3.19

- Accções de vão

$\{Q_0\}_{ac.v\tilde{a}o} = -20$

-Assentamento (rotação)

$\{Q_0\}_{assent..} = -237.5$

-Total

$\{Q_0\} = -252.7$

$$\{X_0\}_{ac.v\tilde{a}o} = \begin{Bmatrix} -20 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{X_0\}_{assent.} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 232.7 \\ -465.3 \end{Bmatrix}$$

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} -20 \\ -20 \\ 232.7 \\ -465.3 \end{Bmatrix}$$

- 1º Modo de Deformação

Pode verificar que:

$[K]=k_{11}=2.333EI$  ;

$\{Q\} = -37.5$  ;

$$[E] = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -1.333 \\ 0.667 \end{bmatrix} * EI$$



- Equação de Equilíbrio do Método dos Deslocamentos:

$$[K]\{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Rightarrow 2.333 EI * d_1 + (-252.7) = -37.5 \Rightarrow d_1 = 92.242/(EI)$$

- Equação de Sobreposição de Efeitos:

$$\{X\} = [E]\{d\} + \{X_0\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -1.333 \\ 0.667 \end{bmatrix} * EI * \left(\frac{92.242}{EI}\right) + \begin{Bmatrix} -20 \\ -20 \\ 232.7 \\ -465.3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -66 \\ 72 \\ 109 \\ -404 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}$$

- Diagramas Finais de Esforços

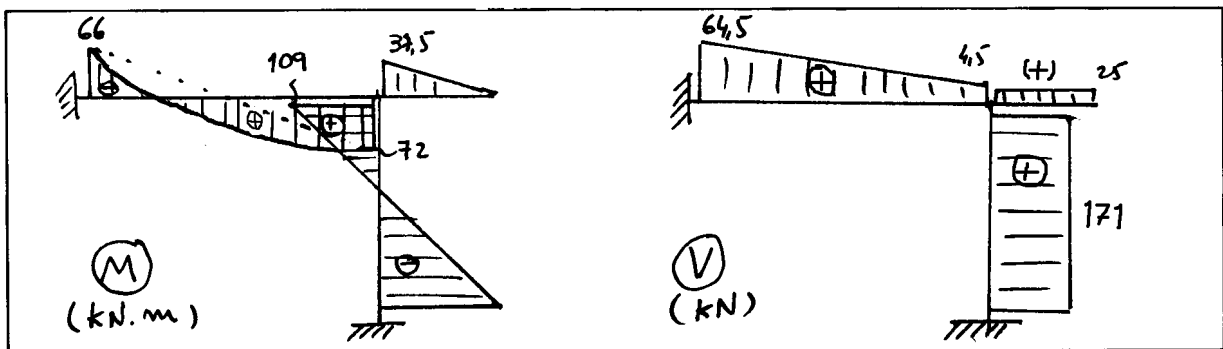
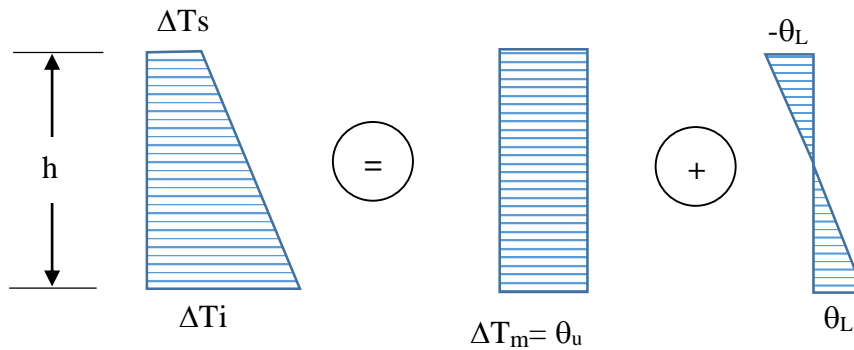


Figura 3.19

### 3.5 - Variação de Temperatura

A variação de temperatura é uma acção de vão. Basta quantificar as forças de fixação  $\{Q_0\}$  e os esforços de fixação  $\{X_0\}$  para a considerar os seus efeitos numa estrutura de que já se conhecem  $[K]$  e  $[E]$  e  $\{Q\}$ . Contudo há que previamente subdividir a distribuição de temperatura ao longo da altura de uma secção,  $h$ , nas suas parcelas, (i) uniforme,  $\theta_u$  e, (ii) linear  $\theta_L$ .



$\Delta T_s$  = variação da Temperatura na fibra superior

$\Delta T_i$  = variação da Temperatura na fibra inferior

- Define-se então  $\theta_u = \frac{\Delta T_s + \Delta T_i}{2}$  como temperatura média ao longo da altura  $h$  da secção, e que é responsável pelo aparecimento de esforços axiais nos elementos base.

- Define-se depois  $\theta_L = \frac{\Delta T_i - \Delta T_s}{2}$  como 1/2 do diferencial de temperatura entre as fibras superior e inferior e que está associada ao aparecimento de curvatura no eixo longitudinal da peça e de momentos flectores.

Quando a variação de temperatura é constante na secção transversal de uma barra surgem apenas esforços e forças axiais no elemento base. Se para além disso for constante ao longo do vão, o esforço axial vale  $N = E * A * \alpha * \Delta T$  qualquer que seja o elemento base como se mostra na figura 3.20:

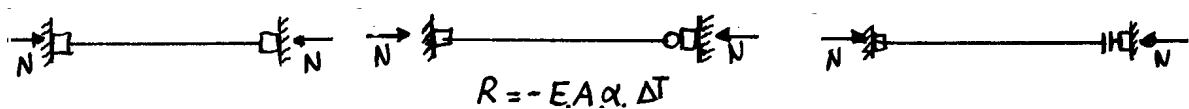


Figura 3.20

Se nas fibras extremas da altura  $h$  (com secção simétrica) a variação de temperatura for simétrica, só irão aparecer momentos flectores na barra, visto que o seu eixo não sofre deformações axiais. Para os diversos tipos de variação de temperatura que na secção como segundo a barra deverá consultar a tabela dos elementos de base sujeitos a variação de temperatura.

EXEMPLO:

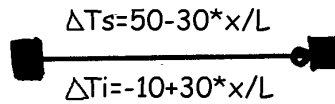


Figura 3.21

$\Delta T_s$  = variação da Temperatura na fibra superior

$\Delta T_i$  = variação da Temperatura na fibra inferior

Para o exemplo presente temos  $\theta_u = 20^\circ \text{C}$  e  $\theta_L = 30 * (\frac{x}{L} - 1)$  como se representa na figura 3.22.

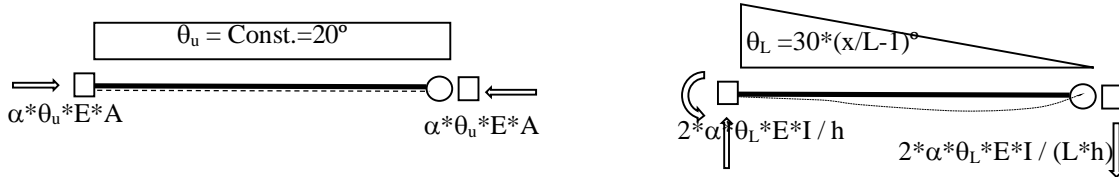


Figura 3.22 – Esforços de fixação devido a temperatura não uniforme.

Os esforços de fixação são retirados das tabelas e somados.

3.5.1 - Cálculo dos esforços de fixação devidos a  $\Delta T$

O processo de determinação dos esforços e forças de fixação varia consoante as hipóteses formuladas quanto à deformabilidade axial das barras.

3.5.1.1 - Caso 1- Cálculo dos esforços de fixação devidos a  $\Delta T$  numa estrutura com Barras Axialmente Deformáveis

Neste caso basta consultar as tabelas relativas à acção da temperatura para os elementos base e construir o vector de esforços  $\{X_0\}$  e o de forças de fixação  $\{Q_0\}$ .

3.5.1.2 - Caso 2- Cálculo dos esforços de fixação devidos a  $\Delta T$  numa estrutura com Barras Axialmente Indeformáveis

O problema é neste caso tratado de forma **aproximada**. Por outro lado só avaliamos o caso das variações de temperatura uniformes na secção.

Procede-se então do seguinte modo:

- (i) Admite-se que as barras são inicialmente desligadas umas das outras nos seus nós, podendo aumentar de comprimento livremente quando sujeitas a um aumento de temperatura. Se esta variação de temperatura for uniforme quer na secção quer ao longo do vão o alongamento é

$$\delta = \alpha * \Delta T * L;$$

(ii) Compatibilizam-se os deslocamentos de barras convergentes no mesmo nó, obrigando-as a deformarem-se por flexão e impedindo que os nós rodem.

(iii) Atendendo à configuração da deformada de cada barra e ao tipo do seu elemento base determinam-se os momentos e esforços axiais de fixação, e as forças de fixação, construindo respectivamente os vectores  $\{X_0\}$  e  $\{Q_0\}$ . Dá-se um exemplo:

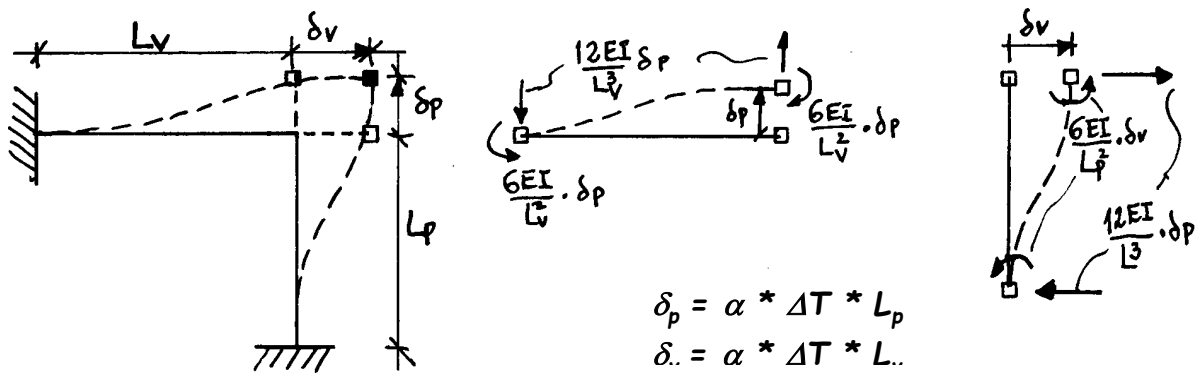


Figura 3.22

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (6EI/L^2)_V * \delta_P \\ -(6EI/L^2)_V * \delta_P \\ -(12EI/L^3)_P * \delta_V \\ -(6EI/L^2)_P * \delta_V \\ (6EI/L^2)_P * \delta_V \\ -(12EI/L^3)_V * \delta_P \end{Bmatrix}, \quad \{Q_0\} = \begin{Bmatrix} -\frac{6EI}{L_v^2} \delta_P + \frac{6EI}{L_p^2} \delta_V \end{Bmatrix}$$

**Nota Importante:** Quando se "fala" em geral da indeformabilidade axial das barras quer-se dizer que não se consideram os deslocamentos nodais associados ao alongamento ou encurtamento das barras quando se constrói a matriz de rigidez da estrutura. A não consideração destas deformações axiais deve-se ao facto de elas gerarem (geralmente em estruturas correntes pequenas) esforços na estrutura muito inferiores aos resultantes da deformação por flexão das barras. No entanto, para a construção do vector de forças de fixação  $\{Q_0\}$  quando associado à variação de temperatura torna-se necessário atender ao alongamento ou encurtamento das barras contrariando (temporariamente!) a hipótese inicial relativa à indeformabilidade axial.

Serão efectuados dois problemas relativos aos casos dos parágrafos 3.5.1.1 e 3.5.1.2.

### Exemplo 1:

Esboce os diagramas de momentos devidos à variação de temperatura de 35° da estrutura apresentada na figura 3.24 a), considerando que as barras são axialmente deformáveis.

$E=29 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ,  $\alpha=10^{-5}$ ,  $\Delta T=+35 \text{ }^\circ\text{C}$

Barra	Secção	EA (kN)	EI (kNm <sup>2</sup> )	Comprimento
1-Viga	0.25x0.40	2900x10 <sup>3</sup>	38657	5.0
2-Pilar	0.25x0.25	1812.5x10 <sup>3</sup>	9438.5	3.0

- Estrutura dada. Discretização e deslocamentos nodais independentes. Fase Zero.

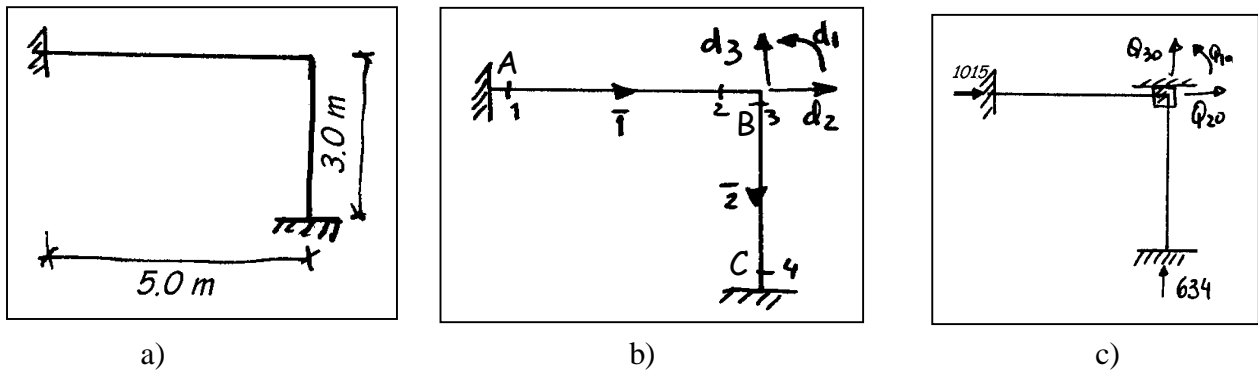


Figura 3.24

- Matrizes de Rigidez [K] e de Esforços [E]

1º Modo	2º Modo	3º Modo
$k_{11} = \left(\frac{4EI}{5}\right)_1 + \left(\frac{4EI}{3}\right)_2 = 43512 \text{ kNm/rad}$ $k_{21} = \left(\frac{6EI}{3^2}\right)_2 = 6293 \text{ kN/rad}$ $k_{31} = \left(-\frac{6EI}{5^2}\right)_1 = -9278 \text{ kN/rad}$	$k_{22} = \left(\frac{EA}{5}\right)_1 + \left(\frac{12EI}{3^3}\right)_2 = 584195 \text{ kN/m}$ $k_{32} = 0$ , $k_{12} = k_{21}$	$k_{33} = \left(\frac{EA}{3}\right)_2 + \left(\frac{12EI}{5^3}\right)_1 = 607878 \text{ kN/m}$ $k_{23} = k_{32} = 0$ , $k_{13} = k_{31}$
$\{E_1\} = \begin{Bmatrix} (-2EI/L)_1 \\ (4EI/L)_1 \\ (-6EI/L^2)_2 \\ (-4EI/L)_2 \\ (2EI/L)_2 \\ (6EI/L^2)_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15462 \\ 30925 \\ -6293 \\ -12586 \\ 6293 \\ 9278 \end{Bmatrix}$	$\{E_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (EA/L)_1 \\ (-6EI/L^2)_2 \\ (6EI/L^2)_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ +580000 \\ -6293 \\ +6293 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\{E_3\} = \begin{Bmatrix} (6EI/L^2)_1 \\ (-6EI/L^2)_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (EA/L)_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +9278 \\ -9278 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 604167 \end{Bmatrix}$

- Fase Zero : Acção  $\Rightarrow$  variação de temperatura de  $\Delta T = +35^\circ\text{C}$

As forças e os esforços de fixação são respectivamente (ver figura 3.24-c):

$$\begin{aligned} Q_{10} &= 0 \\ Q_{20} &= (-E A \alpha \Delta T)_1 = -1015 \text{ kN} \\ Q_{30} &= (-E A \alpha \Delta T)_2 = -634 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1015 \\ 0 \\ 0 \\ -634 \end{Bmatrix}$$

- Equação de equilíbrio de forças (Eq. Método dos Deslocamentos)

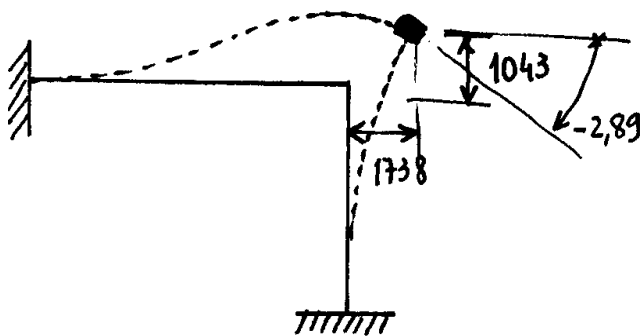
$$[K]\{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 43512 & 6293 & -9278 \\ 6293 & 584195 & 0 \\ -9278 & 0 & 607878 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -1015 \\ -634 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = -28.9 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ d_2 = 1738 \times 10^{-6} \text{ m} \\ d_3 = 1043 \times 10^{-6} \text{ m} \end{cases}$$

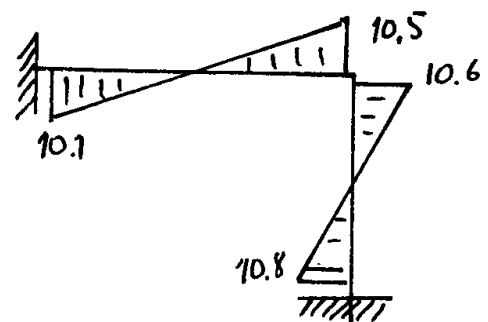
- Equação de Sobreposição de Efeitos:

$$\{X\} = [E]\{d\} + \{X_0\} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -15463 & 0 & 9278 \\ 30926 & 0 & -9278 \\ -6293 & 580000 & 0 \\ -12586 & -6293 & 0 \\ 6293 & 6293 & 0 \\ 9278 & 0 & 604167 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1015 \\ 0 \\ 0 \\ -634 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.1 \\ -10.5 \\ -6.8 \\ -10.6 \\ 10.8 \\ -4.1 \end{Bmatrix}$$



a) Deformada



b) Momentos Flectores

Figura 3.25

## Exemplo 2:

Relativamente ao exemplo anterior determine e esboce os diagramas de momentos admitindo agora a indeformabilidade axial das barras.

Resolução:

- Discretização e Deslocamentos nodais independentes.Fase zero.

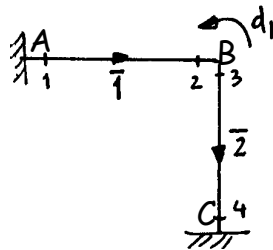


Figura 3.26

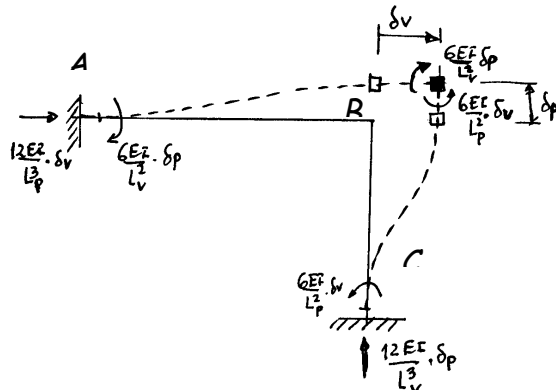


Figura 3.27

- Fase Zero :

Supondo as barras livres no nó B os deslocamentos na viga e pilar seriam (figura 3.27):

$$\delta_{\text{viga}} = \delta_v = \alpha \Delta T L_{\text{viga}} = 35 \cdot 10^{-5} \cdot 5 = 175 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\delta_{\text{pilar}} = \delta_p = \alpha \Delta T L_{\text{pilar}} = 35 \cdot 10^{-5} \cdot 3 = 105 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Impondo estes deslocamentos às extremidades de cada barra e compatibilizando-os, ou seja, ligando as extremidades das barras ao nó B deslocado, à custa da deformação por flexão das barras referidas, a estrutura fica com o aspecto mostrado na figura 3.27 ou 3.23.

Os esforços daí resultantes são:

$$\{X_o\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (6EI/L^2)_V \cdot \delta_P \\ -(6EI/L^2)_V \cdot \delta_P \\ -(12EI/L^3)_P \cdot \delta_V \\ -(6EI/L^2)_P \cdot \delta_V \\ (6EI/L^2)_P \cdot \delta_V \\ -(12EI/L^3)_V \cdot \delta_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 974156 \text{ kNm} \\ -974156 \text{ kNm} \\ -734183 \text{ kN} \\ -1101275 \text{ kNm} \\ 1101275 \text{ kNm} \\ -389663 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

Por outro lado a força de fixação nodal é:

$$Q_{10} = -\left(\frac{6EI}{5^2}\right)_1 \cdot \delta_p + \left(\frac{6EI}{3^2}\right)_2 \cdot \delta_v = 127118.6 \cdot 10^{-5}$$

• Matriz de Rigidez e Matriz de Esforços.

Poderá verificar que :

$$K_{11} = \left( \frac{4EI}{5} \right)_1 + \left( \frac{4EI}{3} \right)_2 = 43511.6 \text{ kNm/rad}$$

A matriz de esforços [E] é neste caso constituída por um único vector que é igual à primeira coluna da matriz [E] do exemplo anterior. Teremos então:

$$\{E_1\} = \begin{Bmatrix} (-2EI/L)_1 \\ (4EI/L)_1 \\ (-6EI/L^2)_2 \\ (-4EI/L)_2 \\ (2EI/L)_2 \\ (6EI/L^2)_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15462 \\ 30925 \\ -6293 \\ -12586 \\ 6293 \\ 9278 \end{Bmatrix}$$

• Equação de equilíbrio de forças (Eq. Método dos Deslocamentos)

Calculamos agora os deslocamentos, que neste caso são apenas a rotação do nó B.

$$[K]\{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Rightarrow 43511.6 * d_1 + 127118.6 \times 10^{-5} = 0 \Rightarrow d_1 = -2.921 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

• Equação de Sobreposição de Efeitos:

Determinamos finalmente os esforços independentes em cada barra.

$$\{X\} = [E]\{d\} + \{X_0\} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15463 \\ 30626 \\ -6293 \\ -12586 \\ 6293 \\ 9278 \end{Bmatrix} * \{d_1\} + \begin{Bmatrix} -974156 \\ -974156 \\ -734183 \\ -1101275 \\ 1101275 \\ -389663 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.2 \text{ kNm} \\ -10.6 \text{ kNm} \\ -7.15 \text{ kN} \\ -10.6 \text{ kNm} \\ 10.8 \text{ kNm} \\ -4.27 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

Comparando estes resultados com os do exemplo 1 verificamos que são praticamente iguais.



### 3.6 - Aparelhos de apoio elásticos

Muitas vezes idealiza-se o comportamento do solo, na interacção solo-estrutura, como se fosse um aparelho de apoio elástico linear, vulgarmente designado por mola. Por outro lado também a interacção entre partes de uma estrutura, melhor dizendo, entre subestruturas, pode em certos casos ser simulada por molas.

O regime de comportamento de um aparelho de apoio é elástico linear se a reacção de apoio  $R$ , for directamente proporcional ao deslocamento observado pelo nó de apoio  $\delta$ , sendo a constante de proporcionalidade designada por rigidez do aparelho de apoio,  $K_m$ . Podemos então escrever a igualdade  $R = K_m * \delta$  que se representa na figura 3.28-a). Consoante a mola “trabalhe” associada a deslocamentos verticais, horizontais ou de rotação de um nó assim se podem adoptar notações diferentes para a rigidez como sejam  $K_v$ ,  $K_h$ , e  $K_\theta$  associadas respectivamente a cada um dos deslocamentos referidos.

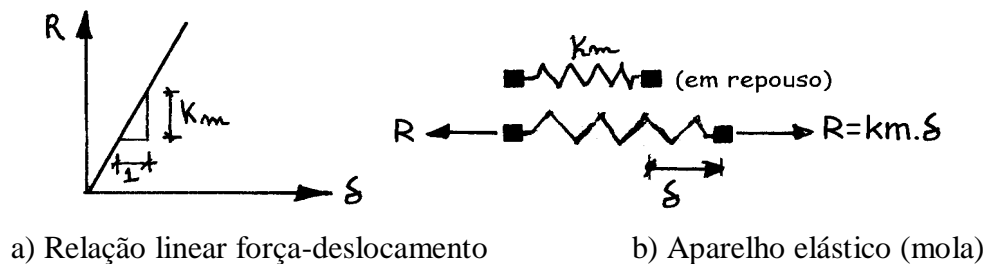


Figura 3.28

Como exemplo refere-se que no caso de fundações directas em solos incoerentes as rigidezes da fundação no sentido vertical e à rotação são respectivamente:

$$k_v = \frac{abE_s}{\sqrt[3]{a^2b(1-\mu^2)}} \quad e \quad k_\theta = \frac{\pi a^2 b E_s}{18(1-\mu^2)} \left(1 + \frac{a}{4b}\right). \quad (3.16-17)$$

sendo  $\mu$  o coeficiente de Poisson, e  $E_s$  o módulo de deformabilidade do solo e  $a$  e  $b$  as dimensões da sapata como indicado na figura 3.28.

Se o nó de apoio for um maciço de encabeçamento de estacas, podem-se determinar as rigidezes de translação e rotação do maciço, que dependem do conjunto de estacas e do solo envolvente e de ponta. As rigidezes determinadas intervêm como molas nos nós de apoio da superestrutura.

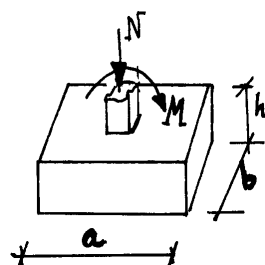
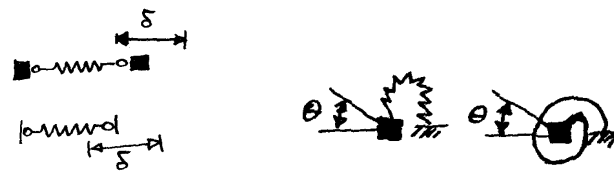


Figura 3.29

Outro exemplo de utilização de molas consiste na substituição de barras à flexão e tirantes respectivamente por molas que trabalham à rotação e translação.

As molas estão simbolicamente representadas nas figuras 3.30 a) e b).



a) Mola "de translação"      b) Mola "de rotação"

Figura 3.30

A existência de uma mola a trabalhar no sentido de certo grau de liberdade contribui directamente para a rigidez desse grau de liberdade. Quer-se dizer que a rigidez da mola acumula-se à rigidez que esse grau de liberdade já tem, proveniente da rigidez das barras da estrutura que convergem nesse nó. A rigidez da mola manifesta-se sempre ao nível da matriz de rigidez.

Problema: Substitua o tirante da estrutura dada (figura 3.31) por uma mola horizontal, sabendo que a rigidez axial da secção do tirante vale EA e tem comprimento L.

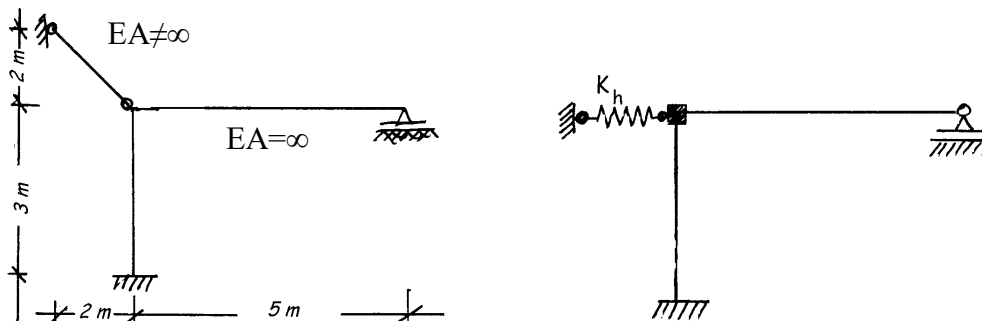


Figura 3.31

Resolução:

Impõe-se um deslocamento unitário horizontal ao tirante (figura 3.32) e determina-se a força de fixação horizontal necessária aplicar (ao tirante) para manter esse deslocamento unitário. Essa força direccionada no sentido de "trabalho" da mola, representa a rigidez pretendida. Como vemos vale:

$$k_h = EA/L * (\cos \alpha)^2 .$$

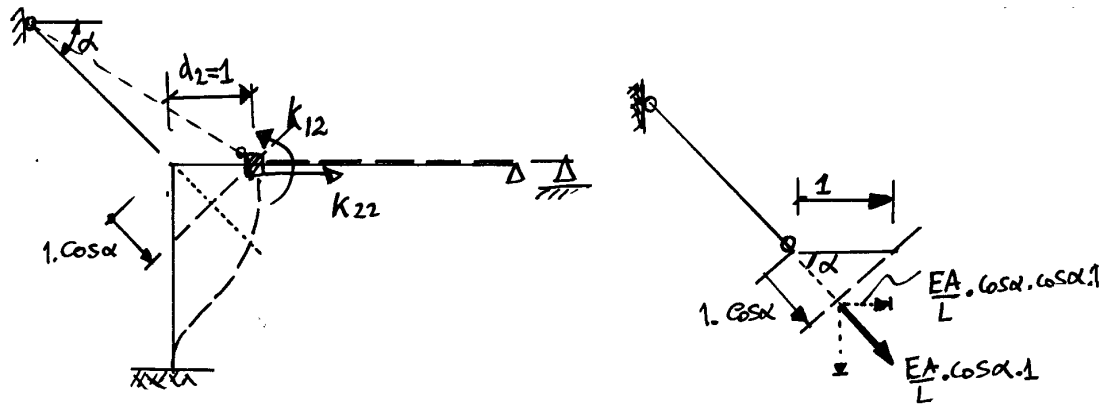


Figura 3.32

3.6.1 - Análise e discussão de um problema particular envolvendo molas.

.... (retirado)

### 3.7 - Barras inclinadas

Vimos até agora que os graus de liberdade  $\{q_i\}$  que atribuímos aos nós de uma barra isolada estavam associados a um referencial local,  $X (X_1, X_2, X_3)$  ou da barra (ver parágrafo 2.3). Nesse referencial a 1ª coordenada refere-se à rotação em sentido anti-horário, e as 2ª e 3ª coordenadas respectivamente à translação no sentido do eixo da barra, e translação perpendicular ao eixo da barra. Arbitrou-se uma sequência para a numeração dos graus de liberdade nodais da barra  $\{q_i\}$  começando pelo nó esquerdo, como se mostra na figura 3.40 a). A barra é orientada do nó esquerdo para o direito e faz um ângulo positivo,  $\alpha$ , medido no sentido anti-horário, em relação à linha de nível horizontal.

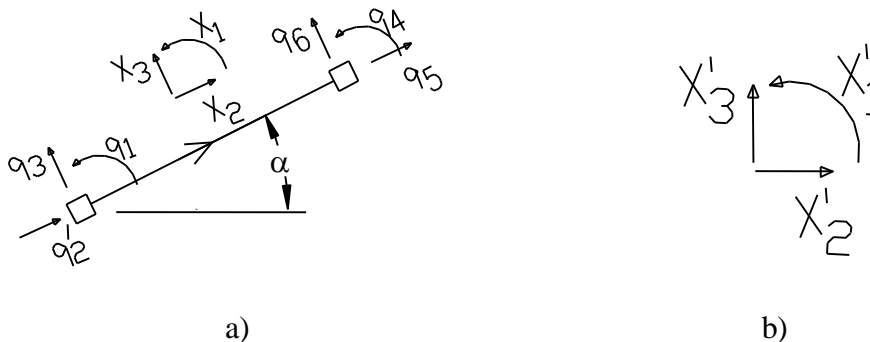


Figura 3.40- a) Deslocamentos nodais da barra em coordenadas locais b) Referencial Global

Relativamente ao referencial local construíram-se as matrizes de rigidez das barras encastrada-encastrada, capítulo 2.3.2, encastrada-rotulada, capítulo 2.3.3 ou 2.3.4, e encastrada-libertação de esforço transversal, cujos coeficientes de rigidez se apresentam nas tabelas de elementos base. Por outro lado os esforços de fixação das ações, também obtidas de tabelas apropriadas, respeitam o mesmo referencial. Todas as forças nodais de fixação  $\{Q_0\}$  estão definidas em relação ao referencial local da barra (ou, também se diz, estão *escritas em coordenadas locais*).

Numa estrutura é necessário representar os deslocamentos e forças nodais de todas as barras no mesmo referencial, para que seja possível a combinação destas grandezas entre barras. Daqui surge a necessidade de definir um referencial comum, o referencial **global**. As suas coordenadas  $X' (X'_1, X'_2, X'_3)$  são, em geral, a rotação no sentido anti-horário, translação segundo a horizontal e translação vertical (figura 3.40-b)). Os deslocamentos nodais de uma barra *escritos em coordenadas globais* apresentam-se na figura 3.40 b). Facilmente se percebe que quando as barras de uma estrutura são horizontais ou verticais, os referenciais locais destas e o global são respectivamente coincidentes e complementares, sendo por isso fácil a soma (ou sobreposição) de deslocamentos e esforços nodais de fixação.

Se a barra estiver inclinada teremos que decompor os deslocamentos e forças em componentes segundo o referencial global antes de podermos fazer a sobreposição dos efeitos de cada barra.

Pretende-se agora, para uma barra inclinada, calcular os coeficientes de rigidez no referencial global a partir dos coeficientes de rigidez previamente conhecidos do referencial local. Pretende-se de igual modo escrever no referencial global as forças de fixação de cargas de vão. Para o fazermos há dois processos: o "método" directo, que é tratado desde já, e o método matricial de mudança de base.

### 3.7.1 - Método directo

Este método consiste em decompor os deslocamentos nodais globais impostos em, componentes individuais de deslocamentos locais que envolvam separadamente:

- (i) deformações axiais da barra, e,
- (ii) deformações por flexão.

As forças fixação de cada parcela individual são depois decompostas nas direcções do referencial global e somadas.

As forças de fixação locais de cargas de vão são simplesmente decompostas segundo as direcções do referencial global.

**Exemplo:** Pretende-se determinar a rigidez  $k'_{55}$  associada ao deslocamento horizontal do nó direito, grau de liberdade  $d'_{5}$ , da barra do tipo encastrada-rotulada.

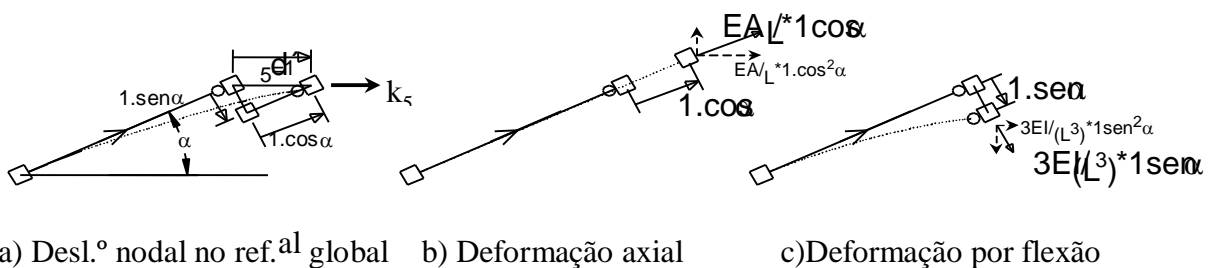


Figura 3.41

Impõe-se um deslocamento unitário nessa direcção  $d'_{5}=1$ , (figura 3.39-a)). Decompõe-se o deslocamento nas parcelas individuais que envolvam deformação axial (figura 3.39-b) e por flexão (figura 3.39-c). As componentes individuais de fixação são decompostas na direcção  $d'_{5}$  e somadas:

$$k'_{55} = \left(\frac{EA}{L} * \cos \alpha\right) * \cos \alpha + \left(\frac{3EI}{L^3} * \sin \alpha\right) * \sin \alpha$$

As forças de fixação para cargas de vão no referencial global são obtidas da decomposição directa das forças de fixação definidas no referencial local. Assim, no caso da figura 3.40, vemos que a força de fixação  $Q_{50} = P/2$  do referencial local se decompõe nas forças de fixação do referencial global  $Q'_{50} = -P/2 * \sin \alpha$  e  $Q'_{60} = P/2 * \cos \alpha$ .

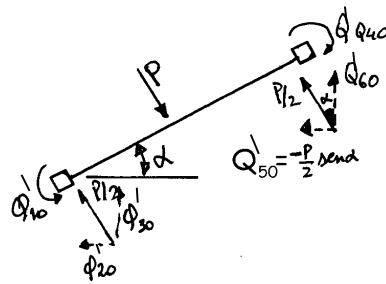


Figura 3.42 - Decomposição das forças de fixação no referencial global

3.7.2 - Mudança de Base

3.7.2.1.- Matriz de Transformação de Coordenadas

Pretende-se escrever os deslocamentos nodais independentes {q} do referencial local X (X<sub>1</sub>,X<sub>2</sub>,X<sub>3</sub>) em função dos deslocamentos equivalentes {q'} do referencial global X' (X'<sub>1</sub>,X'<sub>2</sub>,X'<sub>3</sub>), como mostra a figura. Os eixos X<sub>2</sub> e X'<sub>2</sub> fazem entre si um ângulo α, positivo no sentido anti-horário, sendo o lado origem o eixo X'<sub>2</sub>.

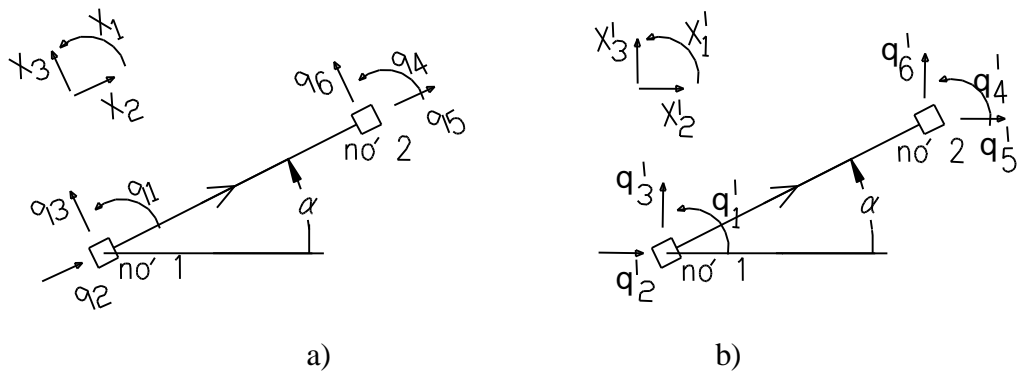


Figura 3.43 - Deslocamentos nodais no referencial local (a) e global(b).

Relacionam-se esses deslocamentos, por exemplo no nó 1, de acordo com o esquema da figura 3.42 e expressões seguintes.

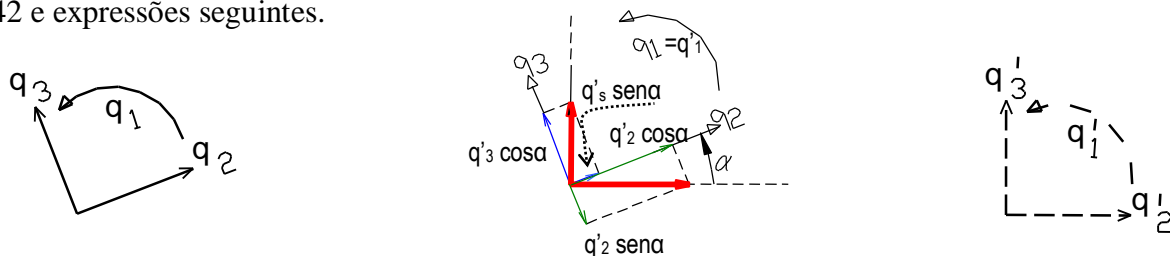


Figura 3.44

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q'_1 \\
 q_2 &= q'_2 \cos \alpha + q'_3 \sin \alpha \\
 q_3 &= -q'_2 \sin \alpha + q'_3 \cos \alpha
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{Bmatrix} \tag{3.18.a}$$

$$\boxed{\{q\} = [T_{nó1}] * \{q'\}} \tag{3.18.b}$$

Se em vez de relacionarmos deslocamentos  $q_i$  e  $q'_i$  relacionarmos coordenadas  $(X_1, X_2, X_3)$  e  $(X'_1, X'_2, X'_3)$  as relações 3.18 permanecem válidas (desde que se substitua  $q_i$  e  $q'_i$  respectivamente por  $X_i$  e  $X'_i$ ). De facto as coordenadas e deslocamentos são grandezas vectoriais proporcionais. Nas igualdades acima define-se a matriz  $[T_{nó1}]$  como a matriz de transformação de coordenadas, neste caso do nó 1.

Deduz-se a matriz de transformação de coordenadas para o nó 2,  $[T_{nó2}]$  pelo mesmo processo a partir das igualdades 3.19

$$\begin{aligned} q_4 &= q'_4 \\ q_5 &= d'_5 \cos \alpha - q'_6 \sin \alpha \\ q_6 &= d'_5 \sin \alpha + q'_6 \cos \alpha \end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cdot & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q'_4 \\ q'_5 \\ q'_6 \end{Bmatrix} \quad (3.19.a)$$

$$\boxed{\{d\} = [T_{nó2}] * \{q'\}} \quad (3.19.b)$$

Se considerarmos todos os graus de liberdade da barra a relação entre deslocamentos (ou entre coordenadas) é dada pela matriz  $[T]$ :

$$\{d\} = [T] * \{q'\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{nó1} & 0 \\ 0 & T_{nó2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \\ q'_4 \\ q'_5 \\ q'_6 \end{Bmatrix}, \quad (3.20.a-b)$$

com

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

$[T]$  designa-se por matriz de transformação de coordenadas para uma barra.

Simbolicamente temos:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Coordenadas no referencial} \\ \text{local} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c} \text{Matriz de} \\ \text{Transformação} \end{array} \right] * \left\{ \begin{array}{c} \text{Coordenadas no referencial} \\ \text{global} \end{array} \right\} \quad (3.22-a)$$

ou,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Deslocamentos no referencial} \\ \text{local} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c} \text{Matriz de} \\ \text{Transformação} \end{array} \right] * \left\{ \begin{array}{c} \text{Deslocamentos no referencial} \\ \text{global} \end{array} \right\} \quad (3.22-b)$$

ou, em geral,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Grandezas no referencial} \\ \text{inicial} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c} \text{Matriz de} \\ \text{Transformação} \end{array} \right] * \left\{ \begin{array}{c} \text{Grandezas no referencial} \\ \text{final} \end{array} \right\} \quad (3.22-3)$$

Quando se recorre às expressões 3.22, transformam-se grandezas vectoriais (*deslocamentos e forças*) de um referencial para outro, e diz-se então que se realizou uma **mudança de base** à custa da matriz de transformação [T]. A matriz de transformação permite escrever os deslocamentos e forças do referencial local em função das mesmas grandezas no referencial global. É afinal uma matriz de rotação, pois opera a passagem de eixos globais para locais à custa de uma rotação de valor  $\alpha$ .

Assim as relações 3.18, 3.19 e 3.20 desenvolvidas para deslocamentos nodais são também válidas para outras grandezas vectoriais a elas associadas como sejam as forças nodais aplicadas {Q}, forças nodais de fixação {Q<sub>0</sub>} e coeficientes de rigidez. Desta forma também se poderá escrever:

$$\{Q_0\} = [T]*\{Q_0'\} \quad (3.23.a)$$

e também:

$$\{Q\} = [T]*\{Q'\} \quad (3.23.b)$$

### 3.7.2.1.1 - Propriedade da Matriz de Transformação de Coordenadas

Fazendo

$$[T]^T * [T] = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & c & -s & . & . & . \\ . & s & c & . & . & . \\ \hline . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & c & -s \\ . & . & . & . & s & c \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & c & s & . & . & . \\ . & -s & c & . & . & . \\ \hline . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & c & s \\ . & . & . & . & -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ \hline . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} = [I] \quad (3.24)$$

com  $c=\cos\alpha$  e  $s= \text{sen}\alpha$ .

Como  $[T]^{-1} * [T] = [I]$ , concluímos que  $[T]^T = [T]^{-1}$ , ou seja, a transposta da matriz de transformação de coordenadas ( $[T]^T$ ) é igual à sua matriz inversa ( $[T]^{-1}$ ).



### 3.7.3 - Equação de Equilíbrio da Barra no Referencial Global

Vamos agora redefinir a equação do método dos deslocamentos para uma barra mas em relação a graus de liberdade globais, ou seja, em termos de coordenadas globais. A barra terá uma inclinação  $\alpha$  em relação ao eixo horizontal.

A mudança de referencial não pode alterar o trabalho realizado por um sistema de forças arbitrário porque é conservativo. O trabalho define-se, como se sabe, por:

$$\text{trabalho} = \text{força } \{Q'\} * \text{deslocamento } \{q'\} \text{ no sentido desta.}$$

Podemos então escrever:

$$\begin{aligned} \{q'\}^T * \{Q'\} &= \{q\}^T * \{Q\} \\ &= ([T] * \{q'\})^T * \{Q\} \\ &= \{q'\}^T * ([T]^T * \{Q\}) \quad \text{logo,} \end{aligned}$$

$$\boxed{\{Q'\} = [T]^T * \{Q\}} \quad (3.25)$$

(aliás, esta igualdade facilmente se obteria por inversão da equação (3.23) e atendendo à propriedade enunciada em 3.7.2.1.1.)

Igualmente se irá obter:

$$\boxed{\{Q_0'\} = [T]^T * \{Q_0\}} \quad (3.26)$$

A equação do método dos deslocamentos no referencial inicial é como se sabe (equação 3.3)

$$[K] * \{q\} + \{Q_0\} = \{Q\} \quad (3.3\text{-rep})$$

Substituindo  $\{q\} = [T] \{q'\}$  vem:

$$[K] * [T] * \{q'\} + \{Q_0\} = \{Q\} \quad (a)$$

e multiplicando à esquerda por  $[T]^T$

$$[T]^T * [K] * [T] * \{q'\} + [T]^T * \{Q_0\} = [T]^T * \{Q\} \quad (b)$$

$$\boxed{[K'] * \{q'\} + \{Q_0'\} = \{Q'\}} \quad (3.27)$$

que é a equação do método dos deslocamentos escrita no referencial  $X'$  (na nova base) com:

$$[K'] = [T]^T * [K] * [T] \quad (3.28)$$

$$\{Q_0'\} = [T]^T * \{Q_0\} \quad (3.26\text{-rep})$$

$$\{Q'\} = [T]^T * \{Q\}. \quad (3.25\text{-rep})$$

3.7.3.1- Matriz de rigidez da barra encastrada-encastrada em coordenadas globais.

A partir da definição 3.28 e atendendo à matriz de rigidez de uma barra em coordenadas locais , equação 2.8, a matriz de rigidez da barra escrita em coordenadas globais é:

$$[K'] = [T]^T * [K] * [T] =$$

=

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & c & -s & . & . & . \\ . & s & c & . & . & . \\ \hline . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & c & -s \\ . & . & . & . & s & c \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \\ \hline \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & c & s & . & . & . \\ . & -s & c & . & . & . \\ \hline . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & c & s \\ . & . & . & . & -s & c \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c \\ -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & -\frac{6EI}{L^2}s & -\frac{EA}{L}c^2 - \frac{12EI}{L^3}s^2 & -\frac{EA}{L}cs + \frac{12EI}{L^3}cs \\ \frac{6EI}{L^2}c & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2 & \frac{6EI}{L^2}c & -\frac{EA}{L}cs + \frac{12EI}{L^3}cs & -\frac{EA}{L}s^2 - \frac{12EI}{L^3}c^2 \\ \hline \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c \\ -\frac{6EI}{L^2}s & -\frac{EA}{L}c^2 - \frac{12EI}{L^3}s^2 & -\frac{EA}{L}cs + \frac{12EI}{L^3}cs & \frac{6EI}{L^2}s & +\frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs \\ -\frac{6EI}{L^2}c & -\frac{EA}{L}cs + \frac{12EI}{L^3}cs & -\frac{EA}{L}s^2 - \frac{12EI}{L^3}c^2 & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & +\frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2 \end{bmatrix}$$

sendo  $c = \cos\alpha$  e  $s = \sin\alpha$ .

A 5ª coluna da matriz de rigidez, por exemplo, são as forças de fixação  $k'_5$  necessárias aplicar à barra, no sentido das coordenadas globais para manter  $d'_5=1$  e os restantes  $d'_j=0$ . A figura 3.45 representa este modo de deformação.

Curiosamente verificamos que se admitir a indeformabilidade axial das barras todos os elementos da matriz com rigidez EA têm valor infinito. Não seria assim possível impor o deslocamento  $d'_5$ . Se observar bem a matriz verificará que as únicas colunas (e linhas) onde EA não intervém são a primeira

e quarta, associadas a graus de liberdade de rotação dos nós. Seriam estas as únicas deformações possíveis.

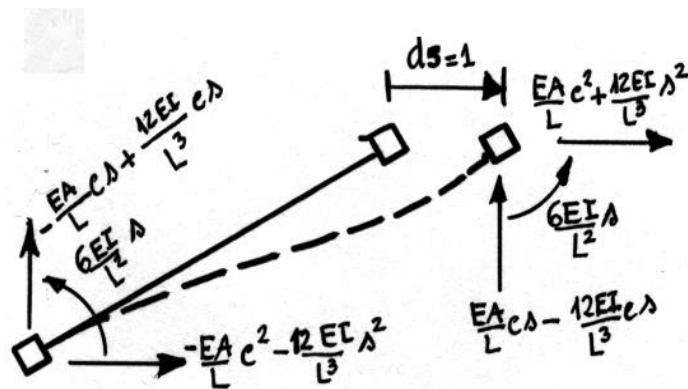


Figura 3.45 - 5º Modo de deformação

Pelo mesmo processo se poderiam obter as matrizes de rigidez em coordenadas globais das barras do tipo encastrado-rotulado, entre muitas outras...

### 3.7.4 - Equação de sobreposição de efeitos para esforços

Os esforços, que são expressos no referencial local de cada barra, podem apresentar-se em função dos novos deslocamentos  $\{q'\}$

$$\{X\} = [E] * \{q\} + \{X_0\} \quad \equiv \quad \boxed{\{X\} = [E] * [T] * \{q'\} + \{X_0\}} \quad (3.29)$$

### 3.8 - Aparelhos de apoio inclinados

Surgem por vezes aparelhos de apoio que restringindo o movimento dos nós em certos sentidos o fazem em direcções não coincidentes com as das coordenadas locais das barras. Este problema pode ser tratado directamente, por um processo de decomposição da geometria das deformadas e forças nodais, ou por um método matricial que recorre à técnica de mudança de base.

### 3.8.1 - Aparelhos de apoio inclinados- método directo

Explica-se o "método directo" com um exemplo.

Exemplo: Determine os coeficientes da matriz de rigidez e as forças nodais de fixação das cargas de vão seguinte estrutura.

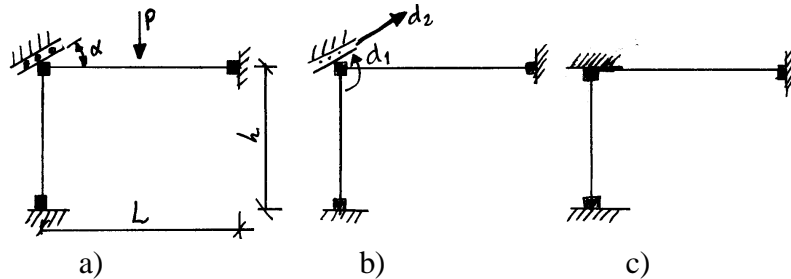


Figura 3.46 - a)Estrutura dada; b)Deslocamentos nodais independentes; c)Estrutura fundamental

• Cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez

Da figura 3.47 obtemos:

$$k_{11} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h} \quad \text{e} \quad k_{21} = \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha + \frac{6EI}{H^2} \cos \alpha$$

Repare-se que é necessário decompor a força de fixação  $6EI/L^2$  no referencial local no sentido do deslocamento global  $d_2$ .

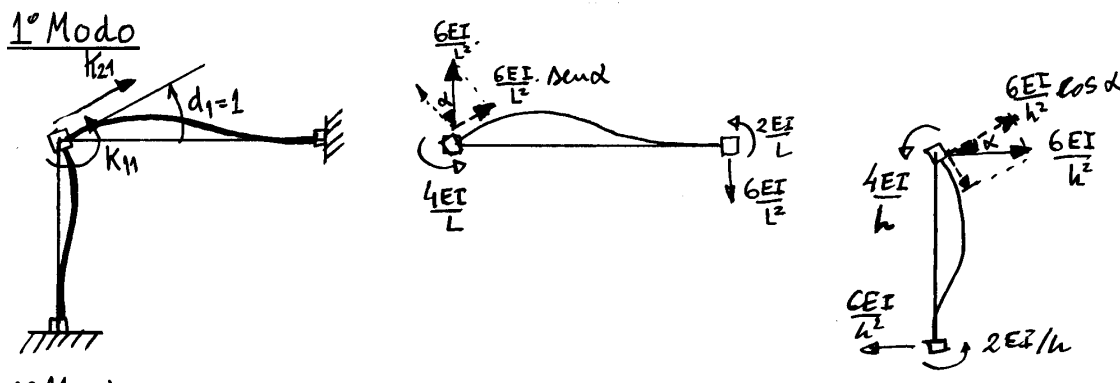


Figura 3.47 - 1º modo de deformação

Da figura 3.47 obtemos os coeficientes da segunda coluna da matriz de rigidez. É necessário decompor a deformada de cada uma das barras nas parcelas relativas à deformação axial e deformação por flexão. A seguir, para quantificação de  $K_{22}$  é necessário decompor as forças de fixação locais do sentido do deslocamento global  $d_2$ .

$$k_{21} = \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha + \frac{6EI}{H^2} \cos \alpha$$

$$k_{22} = \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \alpha + \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{H^3} \cos^2 \alpha + \frac{EA}{H} \sin^2 \alpha$$

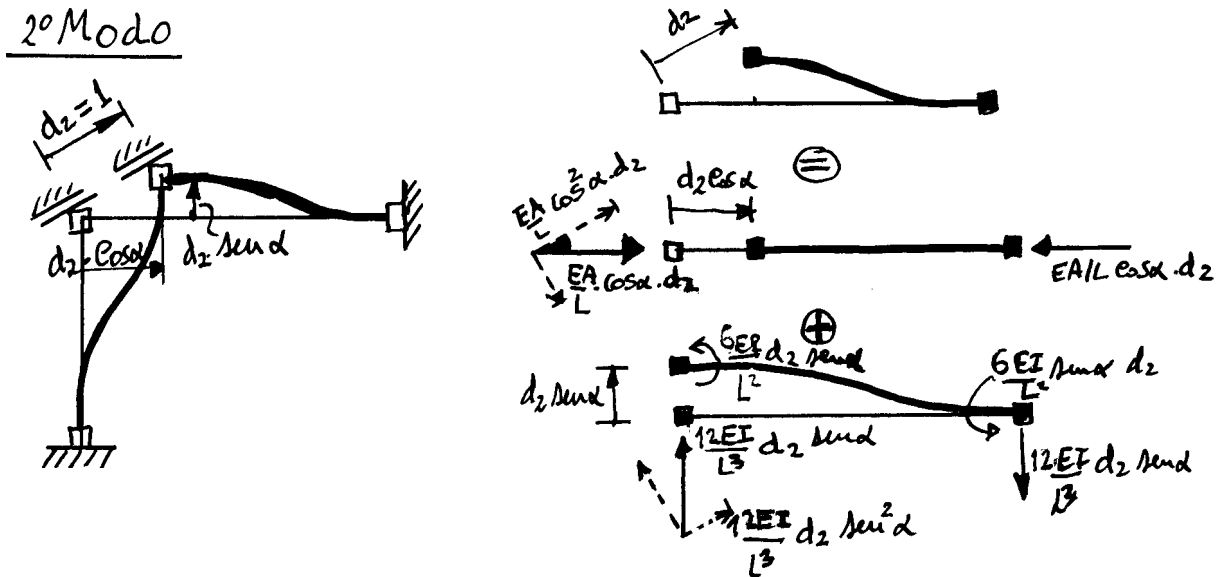


Figura 3.48 - 2º modo de deformação

- Cálculo das forças de fixação das cargas de vão

As forças de fixação locais são decompostas no sentido das coordenadas globais (deslocamentos globais  $d_1$  e  $d_2$ ). Obtemos:

$$Q_{10} = PL/8$$

$$Q_{20} = P/2 \operatorname{sen} \alpha$$

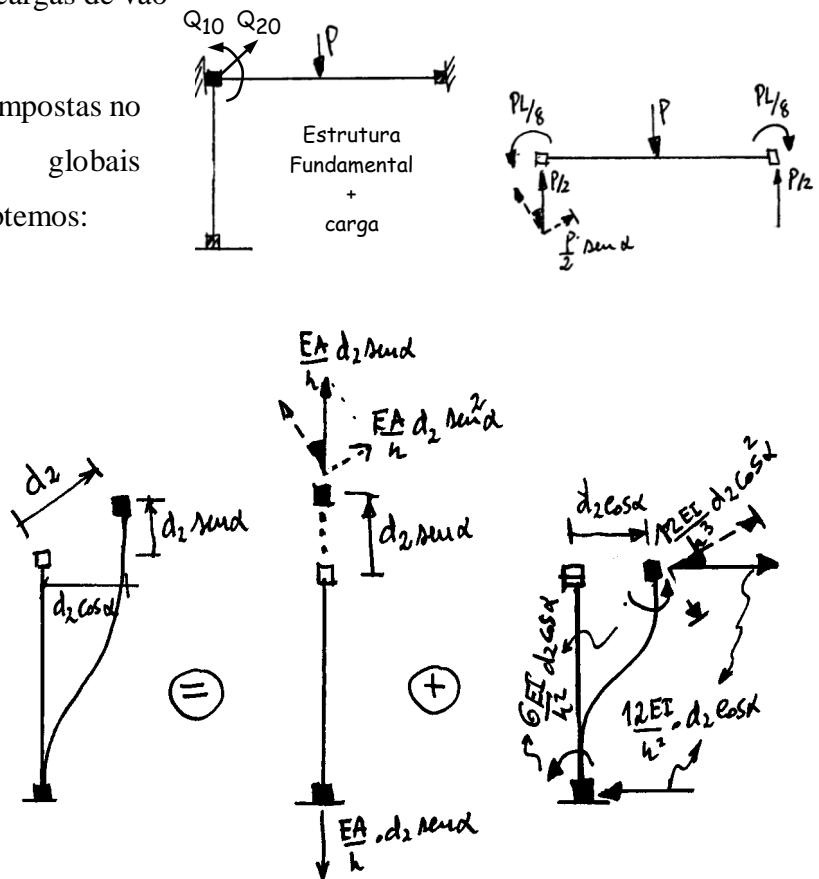


Figura 3.49

### 3.8.2 - Aparelhos de apoio inclinados- métodos matriciais

Os métodos matriciais de tratamento de apoio consistem na aplicação do conceito de mudança de base estudado na secção 3.7.2.1. Nestes apontamentos apresentam-se duas formulações sendo a primeira mais formal e a segunda mais orientada para a aplicação prática.

#### 3.8.2.1 - Método Matricial - Resolução formal

A estrutura da figura 3.50 tem dois graus de liberdade, concretamente a rotação  $d'_1$ , e a translação  $d'_2$  na direcção  $X'_2$  a qual é condicionada pelo apoio exterior. Estes graus de liberdade estão de acordo com um o referencial  $X'_i$ , que por conveniência de exposição de designará por Sistema Base 2. As forças de fixação  $\{Q'_0\}$  e  $\{Q'\}$  assim como os coeficientes  $K'_{ij}$ , necessários para a resolução da referida estrutura, devem estar coerentes com este sistema.

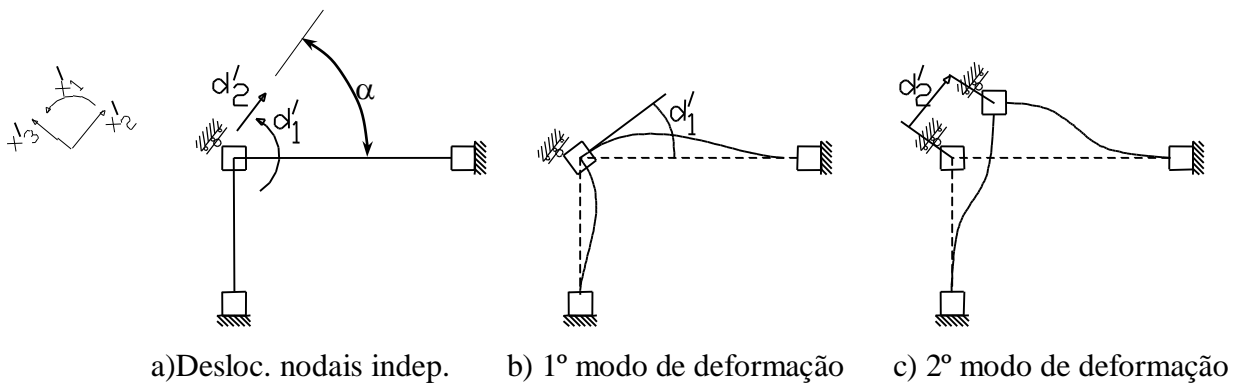


Figura 3.50- Sistema Base 2

No entanto, o comportamento desta estrutura pode ser estudado noutra referencial, o referencial  $X_i$  (ver figura 3.51). Os modos de deformação neste referencial são mostrados na figura 3.51 e estão associados aos deslocamentos nodais,  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ , designados por Sistema Base 1. Neste sistema deve impor-se uma relação de interdependência entre os modos 2 e 3 de modo a simular o comportamento do nó com apoio inclinado. Esta relação de interdependência é estabelecida por:

$$d_3 = \text{tg } d_2.$$

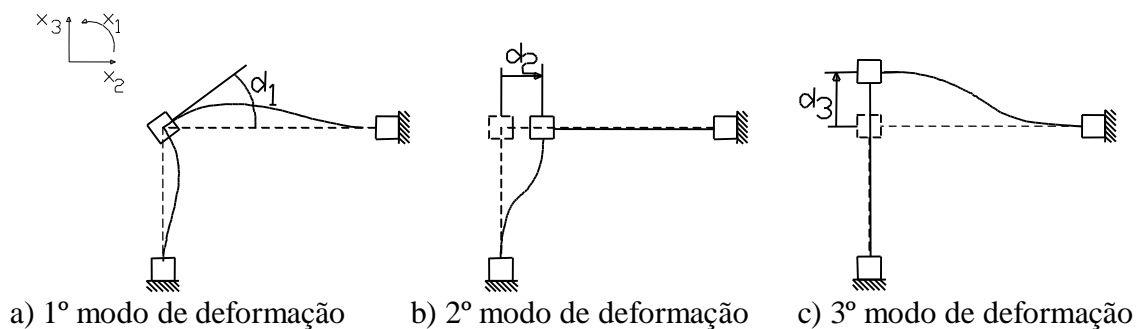


Figura 3.51- Sistema Base 1

É, finalmente, possível estabelecer uma relação entre os dois sistemas base. Esta relação estabelece-se ao escrever todos os deslocamentos nodais independentes (ou forças nodais) do sistema base 1 como função dos deslocamentos nodais independentes do sistema base 2, a qual é traduzida por meio da matriz de transformação de deslocamentos [T].

$$\begin{aligned}
 d_1 &= d'_1 \\
 d_2 &= d'_2 \cos \alpha \\
 d_3 &= \operatorname{tg} d_2 = d'_2 \operatorname{sen} \alpha
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} 1 & . \\ . & \cos \alpha \\ . & \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix}
 *
 \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{Bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & . \\ . & \cos \alpha \\ . & \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\{d\} = [T] * \{d'\}$$

A estrutura pode ser resolvida iniciando a construção da matriz de rigidez [K] e dos vectores de forças de fixação  $\{Q_0\}$  e  $\{Q\}$  no referencial primário  $X(X_1, X_2, X_3)$ . A equação de equilíbrio do método dos deslocamentos neste referencial escrever-se-á:

$$[K] * \{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \quad (a)$$

e é um sistema com três equações, porque o problema no sistema base 1 tem 3 graus de liberdade (embora dois deles sejam dependentes entre si). Pode reduzir-se agora este sistema de equações aos graus de liberdade do sistema base 2. Numericamente isto pode ser realizado efectuando uma mudança de base. Para tal usa-se a matriz de transformação de coordenadas indicada na equação 3.30 obtendo-se:

$$[K'] * \{d'\} + \{Q'_0\} = \{Q'\} \quad (3.27\text{-rep})$$

que é um sistema de duas equações a duas incógnitas com  $[K']$ ,  $\{Q'_0\}$  e  $\{Q'\}$  definidos respectivamente pelas expressões 3.28, 3.26 e 3.25. Para o exemplo apresentado obtém-se:

$$[K'] = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix} = [T]^T * [K] * [T] = \dots \quad (3.28\text{-rep})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{4EI}{H} + \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{H^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{12EI}{H^3} + \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EA}{H} + \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} = \dots \quad (3.28-a)$$

$$= [T]^T * ([K] * [T]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{4EI}{H} + \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{H^2}c + \frac{6EI}{L^2}s \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{12EI}{H^3}c + \frac{EA}{L}c \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{EA}{H}s + \frac{12EI}{L^3}s \end{bmatrix} = \dots \quad (3.28-b)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4EI}{H} + \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{H^2} * c + \frac{6EI}{L^2} * s \\ \frac{6EI}{H^2} * c + \frac{6EI}{L^2} * s & \left( \frac{12EI}{H^3} + \frac{EA}{L} \right) * c^2 + \left( \frac{EA}{H} + \frac{12EI}{L^3} \right) * s^2 \end{bmatrix} \quad (3.28-c)$$

com  $c = \cos(\alpha)$  e  $s = \text{seno}(\alpha)$ , e ainda:

$$\{Q'_0\} = [T]^T * \{Q_0\} = \begin{Bmatrix} Q'_{10} \\ Q'_{20} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ Q_{30} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} PL/8 \\ 0 \\ P/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} PL/8 \\ 0 * c + P/2 * s \end{Bmatrix}, \quad (3.26\text{-rep})$$

e,

$$\{Q'\} = [T]^T * \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q'_1 \\ Q' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2c + Q_3s \end{Bmatrix}. \quad (3.25\text{-rep})$$

### 3.8.2.2 - Método Matricial - Procedimento Prático Manual

É possível determinar directamente a matriz  $[K][T]$  com base no sistema base final, 2. Basta desenhar os modos de deformação da estrutura neste sistema base, determinar as suas forças de fixação, para depois ler-las segundo as coordenadas do sistema base 1. Obtém-se directamente  $[K][T]$ . A matriz de rigidez  $[K']$  é finalmente calculada do produto  $[K'] = [T]^T * ([K] * [T])$ .

Relativamente à determinação do vector  $\{Q'_0\}$  é mais fácil seguir a sua definição (ou seja a expressão (3.26)) por ser mais prático quantificar  $\{Q_0\}$  no sistema base 1. Em alternativa à utilização de (3.26), ao projectar  $\{Q_0\}$  segundo as coordenadas do 2º sistema obtemos  $\{Q'_0\}$ .

No que respeita a  $\{Q'\}$  ou se obtém directamente no sistema de coordenadas  $X'$  ou a partir da



equação (3.25).

Os esforços são calculados pela equação (3.29). O produto  $[E]*[T]$  é directamente quantificado a partir do sistema base 2, aproveitando os modos de deformação antes desenhados para determinar  $[K][T]$ .

$$\{X\} = [E] * [T] * \{d'\} + \{X_0\} \quad (3.29\text{-rep.})$$

**Exemplo:**

Desenhe-se o 2º modo do sistema base 2 e determinem-se as forças de fixação (ver figura 3.52-a)). Por exemplo, as componentes das forças de fixação segundo os graus de liberdade  $d_2$  e  $d_3$  do sistema base 1, quando se impõe um deslocamento unitário segundo  $d'_2$ , são respectivamente:

$$([K][T])_{22} = 12EIs/L^3 + EAs/H \quad \text{e} \quad ([K][T])_{32} = 12EIc/L^3 + EAc/H .$$

**O elemento  $([K][T])_{ij}$  é a componente nodal das forças de fixação segundo o grau de liberdade  $i$  do sistema base 1, quando se impõe um deslocamento unitário segundo o grau de liberdade  $j$  do sistema base 2.** Assim, o número de linhas ( $i$ ) e de colunas ( $j$ ) de  $([K][T])$  são iguais respectivamente ao número de modos de deformação dos sistemas de base 1 e 2.

Relativamente à figura (3.52-b)) as forças de fixação das cargas de vão são, no sistema base 1,  $Q_{10} = PL/8$ ,  $Q_{20} = 0$  e  $Q_{30} = P/2$ . O vector  $\{Q'_0\}$  obtém-se de (3.26) ou, pela projecção das forças  $\{Q_0\}$  segundo as coordenadas do sistema base 2, isto é,  $Q'_{10} = PL/8$  e  $Q'_{20} = P*\text{sen}\alpha / 2$ .

**O elemento  $i$  do vector  $Q'_{i0}$  são as componentes das forças de fixação das cargas de vão nas coordenadas do sistema base 1, projectadas segundo as coordenadas  $i'$  do sistema de base 2.**

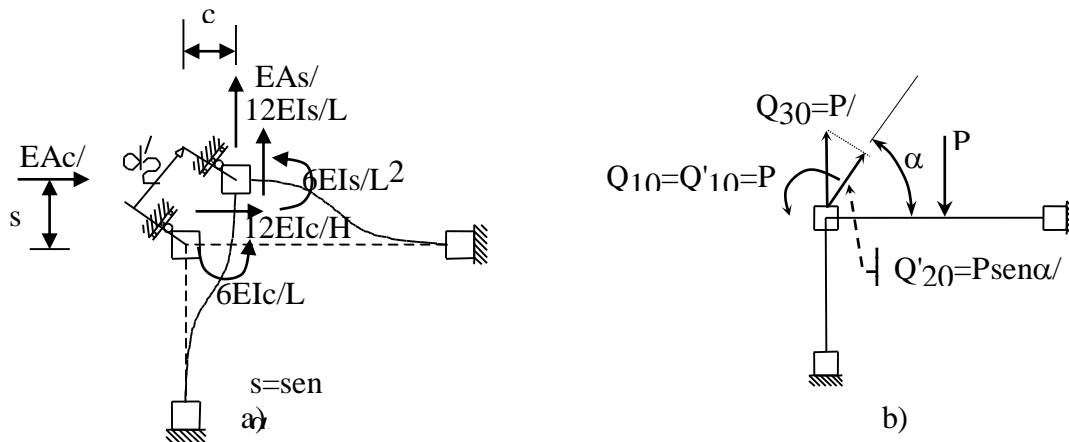


Figura 3.52 - a) Coeficientes de rigidez , b) Forças de fixação

### 3.9- Cálculo de forças nodais de fixação

As forças nodais de fixação numa estrutura fundamental podem ser de dois tipos:

- (i) os coeficientes da matriz de rigidez,  $k_{ij}$  associados ao modo de deformação  $j$ , e,
- (ii) as forças  $Q_{j0}$  que equilibram as acções de vão actuantes na estrutura fundamental.

Quando a geometria de uma estrutura não é regular pode ser trabalhosa a determinação destas forças. Apresentam-se alternativas de cálculo das mesmas forças de fixação baseadas:

- (i) no equilíbrio da estrutura cinematicamente determinada desmembrada nos seus elementos singulares, barras e nós;
- (ii) no equilíbrio da estrutura global cinematicamente determinada;
- (iii) na aplicação do Princípio dos Trabalhos virtuais;
- (iv) na mudança de base de sistemas de coordenadas.

Estas metodologias podem variar ligeiramente consoante se considera ou não a deformabilidade axial das barras. Exemplificando estes processos vamos calcular os coeficientes  $K_{22}$  e  $Q_{20}$  da seguinte estrutura (figura 3.53-a)).

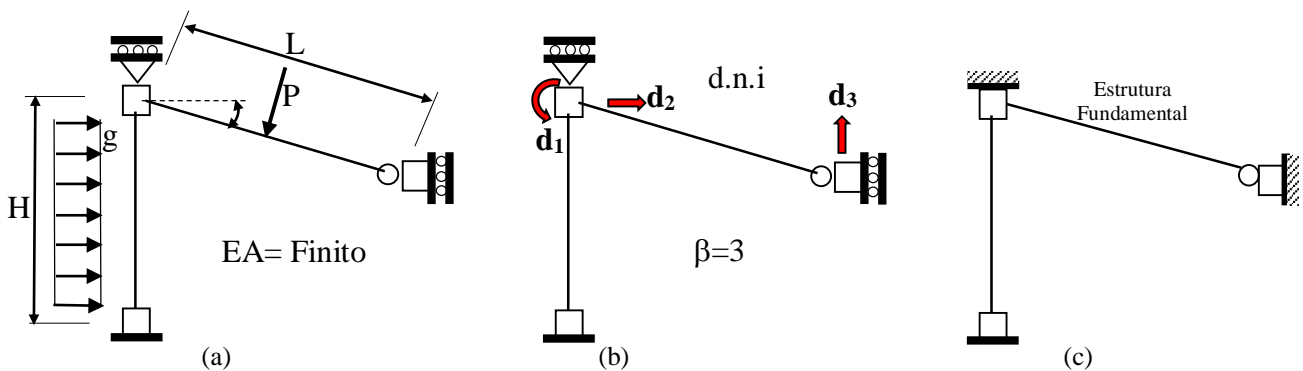
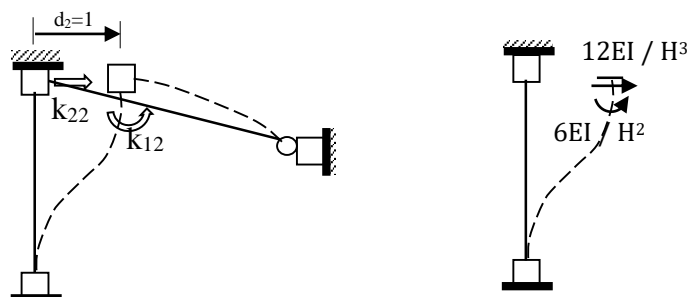


Figura 3.53 -a) Estrutura dada b) Deslocamentos nodais independentes c) Estrutura fundamental

#### 3.9.1.- Cálculo das forças de fixação recorrendo ao equilíbrio da estrutura cinematicamente determinada desmembrada nos seus elementos singulares, barras e nós.

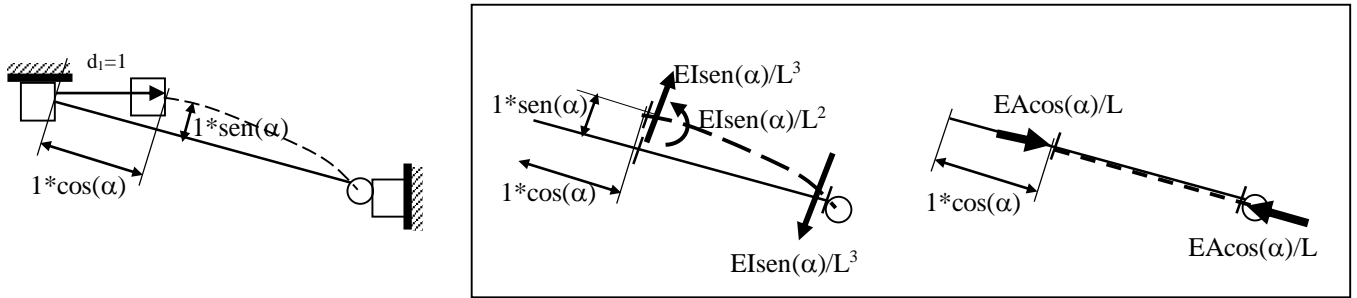
##### 3.9.1.1 - Caso de barras axialmente deformáveis

##### • Cálculo de $K_{22}$



CONTINUA...

Figura 3.54 (I) -a) 2º Modo de deformação b) Esforços de fixação na coluna



(c)

Figura 3.54(II) -c) Esforços de fixação na barra inclinada

Transferindo para o nó B os esforços transversos e normais de fixação existentes nas secções extremas das barras e adjacentes aquele nó, é possível a determinação da força de fixação  $K_{22}$  por equilíbrio no nó B obtendo-se:

$$k_{22} = \frac{12EI}{H^3} + \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{L^3} \sin^2 \alpha \quad (3.31)$$

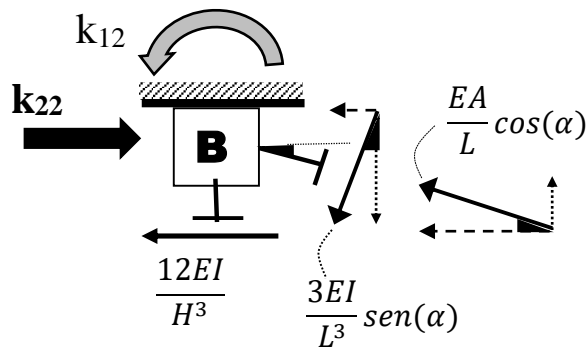
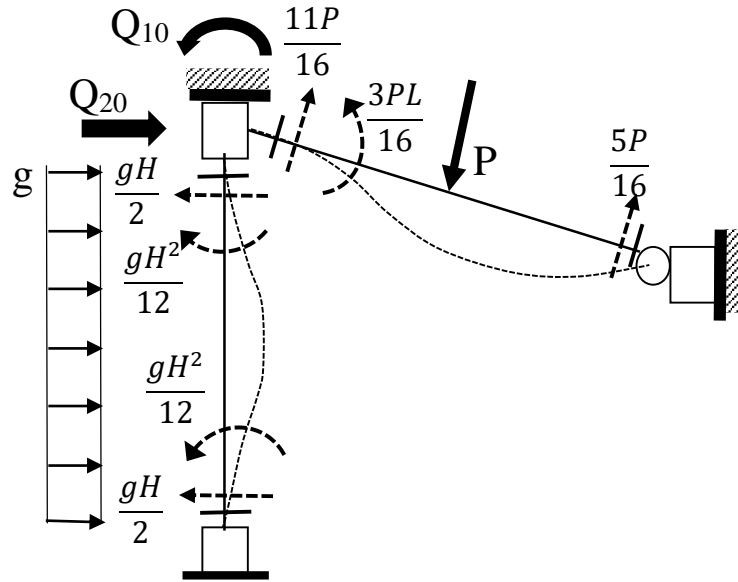


Figura 3.55 - Equilíbrio do nó B

• Cálculo de  $Q_{20}$

Para determinar  $Q_{20}$  quantificam-se os esforços de fixação nas barras, sobre a estrutura fundamental, quando actuam as cargas de vão:



b)

Figura 3.56 -a) Acções de vão b) Esforços de fixação

Transferindo para o nó B os esforços de fixação existentes nas secções extremas das barras determinamos  $Q_{20}$ , porque sabemos que "a força de fixação num nó é igual à soma dos esforços de fixação nas secções nelas adjacentes com sentido positivo igual ao da força de fixação".

$$Q_{20} = \frac{-gH}{2} + \frac{11}{16} P \text{sen} \alpha \quad (3.32)$$

Aliás isolando o nó e fazendo o seu equilíbrio confirma-se a afirmação anterior e a expressão (3.32).

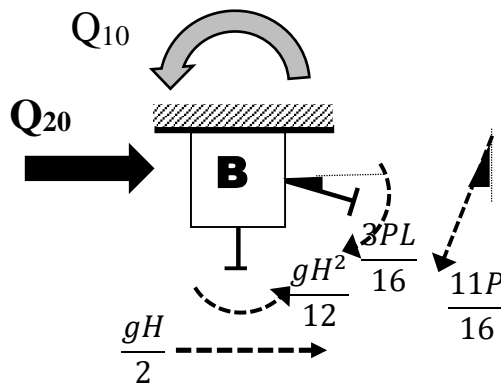


Figura 3.57 - Equilíbrio do nó B

3.9.1.2.- Caso de barras axialmente indeformáveis

Vamos agora admitir que as barras são axialmente indeformáveis. Calculemos de novo as forças de fixação  $k_{22}$  e  $Q_{20}$  da nova estrutura fundamental (figura 3.58-c)).

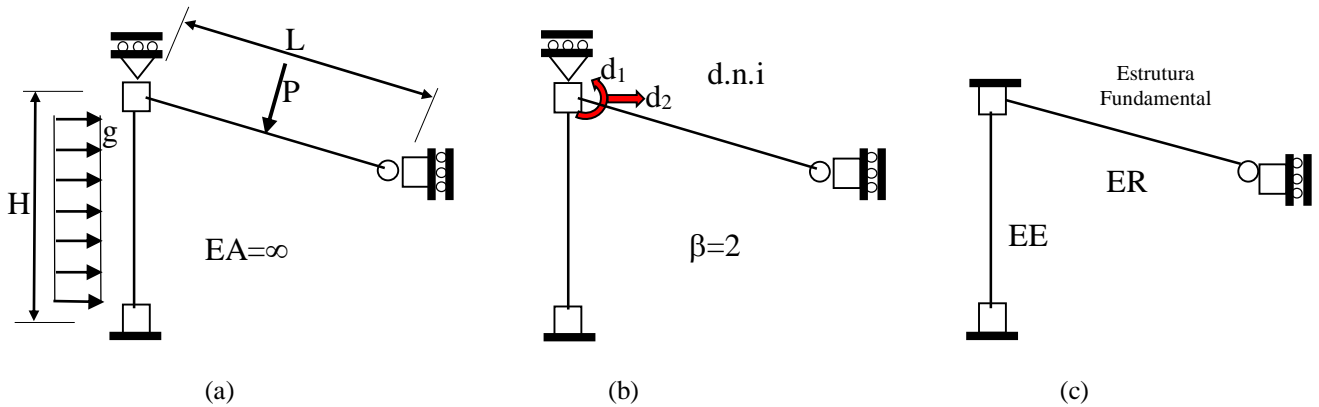


Figura 3.58 -a) Estrutura dada b) Deslocamentos nodais independentes c) Estrutura fundamental

• Cálculo de  $K_{22}$  (barras axialmente indeformáveis)

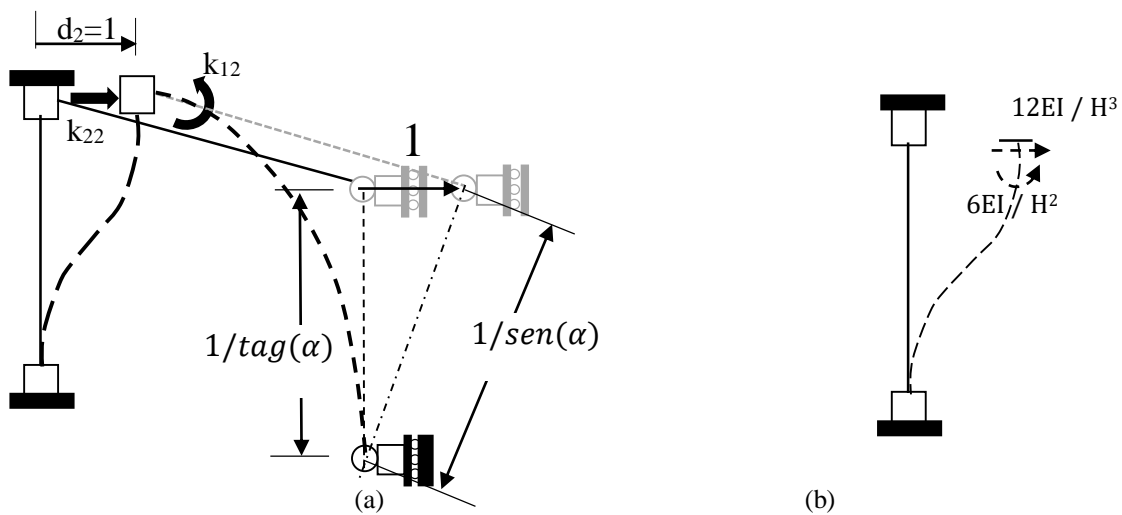


Figura 3.59(I) -a) 2º Modode deformação b) Esforços de fixação na coluna

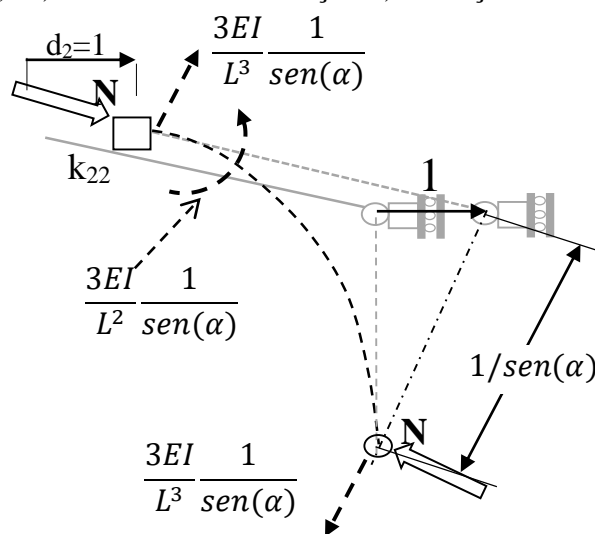


Figura 3.59(II) - c) Esforços de fixação na barra inclinada

Impõe-se um deslocamento unitário  $d_2=1$  mantendo  $d_1=0$ . O coeficiente  $k_{22}$  será determinado a partir do equilíbrio do nó B. Porém, no nó C os esforços internos de fixação deverão estar em equilíbrio com a reacção exterior R, do qual resulta um esforço axial  $N$ , que aparentemente parecia não existir. É determinado pelo equilíbrio do nó C, fazendo o somatório das forças verticais, e que vale (ver figura 3.60 a):

$$N = \frac{3EI}{L^3} \frac{1}{\text{sen } \alpha * \text{tag } \alpha} = \frac{3EI \cos \alpha}{L^3 \text{sen}^2 \alpha} \quad (3.33)$$

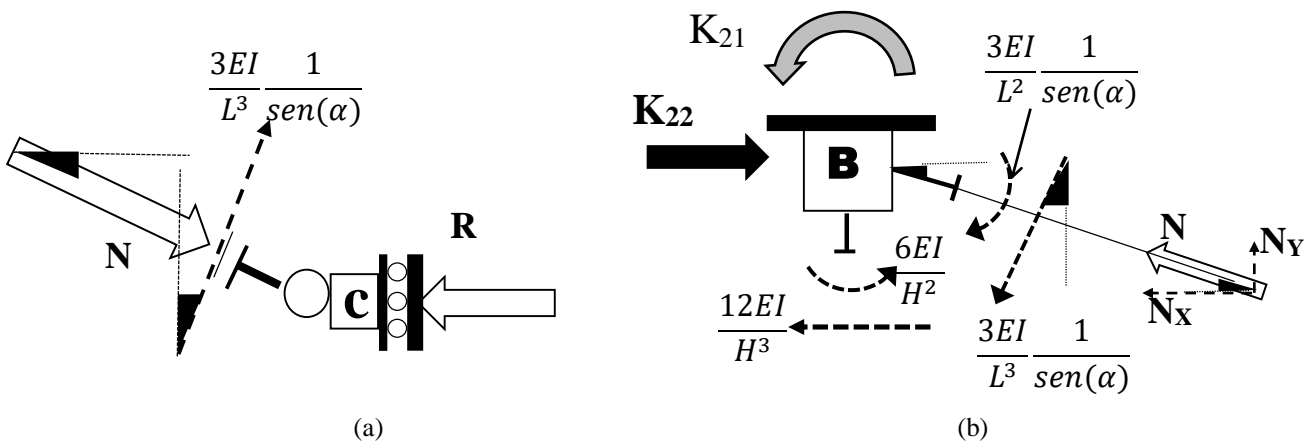


Figura 3.60 - a) Equilíbrio no nó C , b) Equilíbrio nó B.

O esforço axial  $N$  transmite-se pela barra BC à secção adjacente ao nó B. Por equilíbrio nodal de B (figura 3.60-b), obtém-se  $K_{22}$ :

$$K_{22} = \frac{12EI}{H^3} + N_x + V_x = \frac{12EI}{H^3} + \frac{3EI \cos \alpha}{L^3 \text{sen } \alpha} * \cos \alpha + \frac{12EI}{L^3} \frac{1}{\text{sen } \alpha} * \text{sen } \alpha \quad (3.34)$$

Resumindo, o esforço axial  $N$  necessário existir em C para garantir o equilíbrio deste nó, transmite-se pela barra ao nó B interferindo e participando também no equilíbrio deste nó. Concluindo para determinar  $K_{22}$  não basta o equilíbrio do nó B, onde esta força de fixação actua, mas também o equilíbrio em todos os nós extremos das barras que convergem em B.

• Cálculo de  $Q_{20}$  (barras axialmente indeformáveis)

Vamos agora determinar a força nodal  $Q_{20}$  procedimento onde surgirá novamente este tipo de problema.

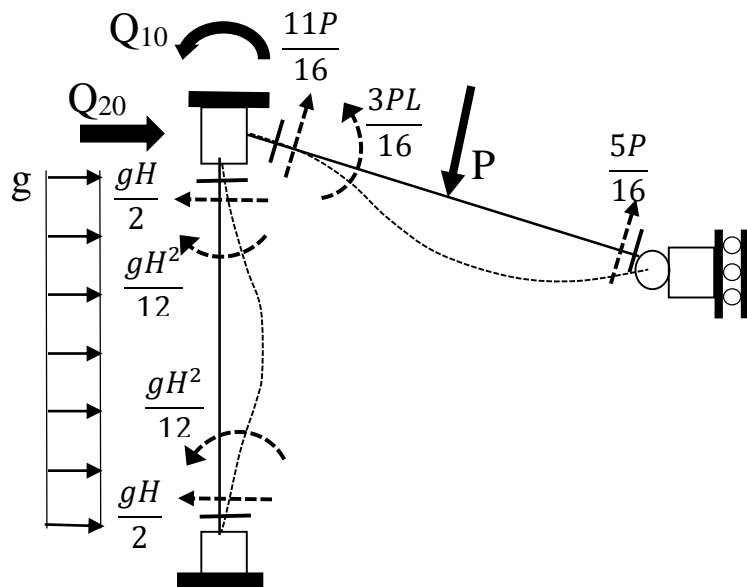


Figura 3.61 -a) Acções de vão b) Esforços de fixação

Taça como no cálculo de  $K_{22}$ , também é necessário fazer o equilíbrio prévio do nó C, para determinar o esforço axial N, e depois o equilíbrio em B, onde este esforço axial também participa.

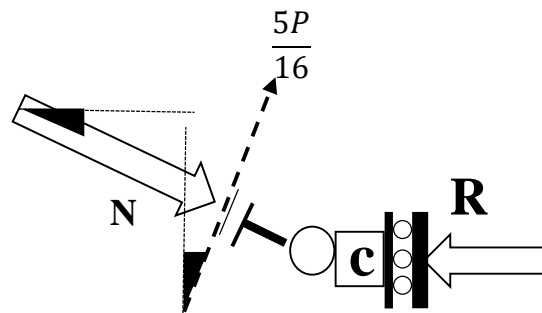


Figura 3.62- Equilíbrio do nó C

De:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow -N \cdot \sin\alpha + 5 \cdot P \cdot \cos\alpha / 16 = 0 \Rightarrow N = 5 \cdot P / (16 \cdot \tan\alpha) = 0 \quad (3.35)$$

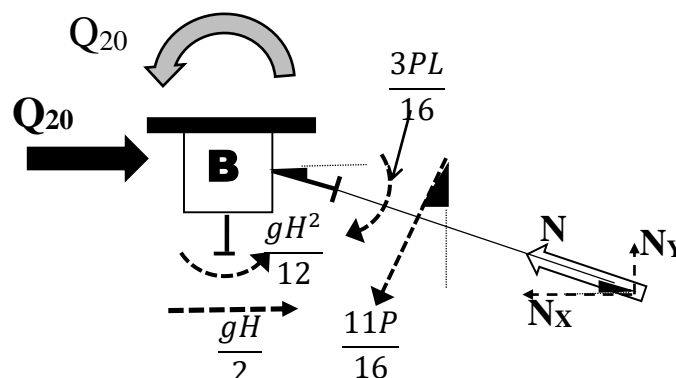


Figura 3.63 – Equilíbrio no nó B

Do equilíbrio no nó B resulta:

$$Q_{20} = -\frac{gH}{2} + \frac{11P}{16} \operatorname{sen}\alpha + \frac{5P \cos\alpha}{16 \operatorname{sen}\alpha} \cos\alpha = -\frac{gH}{2} - \frac{P}{16} \left(11 + \frac{5}{\tan^2\alpha}\right) \quad (3.36)$$

Note-se que entre os casos de estruturas com barras axialmente deformáveis e indeformáveis, como as estruturas fundamentais correspondentes são diferentes, assim serão diferentes os coeficientes  $K_{22}$  das expressões 3.31 e 3.34 e as forças  $Q_{20}$  das expressões 3.32 e 3.36.

Reparamos que este processo de cálculo para a determinação das forças de fixação ( $K_{22}$  e  $Q_{20}$ , aqui exemplificadas) é bastante moroso e pode facilmente conduzir a erros de cálculo, sobretudo se as barras são axialmente indeformáveis. Há contudo, dois processos que permitem a resolução mais prática deste tipo de problemas. O primeiro consiste em fazer o equilíbrio para a estrutura global desde que seja cinematicamente determinada. O segundo reside na aplicação do **Princípio dos Trabalhos Virtuais** (PTV) (enunciado na equação B.22 e demonstrado no anexo B).



3.9.2.- Cálculo das forças de fixação recorrendo ao equilíbrio da estrutura global cinematicamente determinada.

Mais uma vez se explica este processo com um exemplo. Imagine-se que se pretende determinar  $k_{22}$ . Basta desenhar a deformada da estrutura que é cinematicamente determinada, porque os deslocamentos nodais são conhecidos, e determinar barra a barra as componentes das forças de fixação que actuam na direcção de  $k_{22}$ .

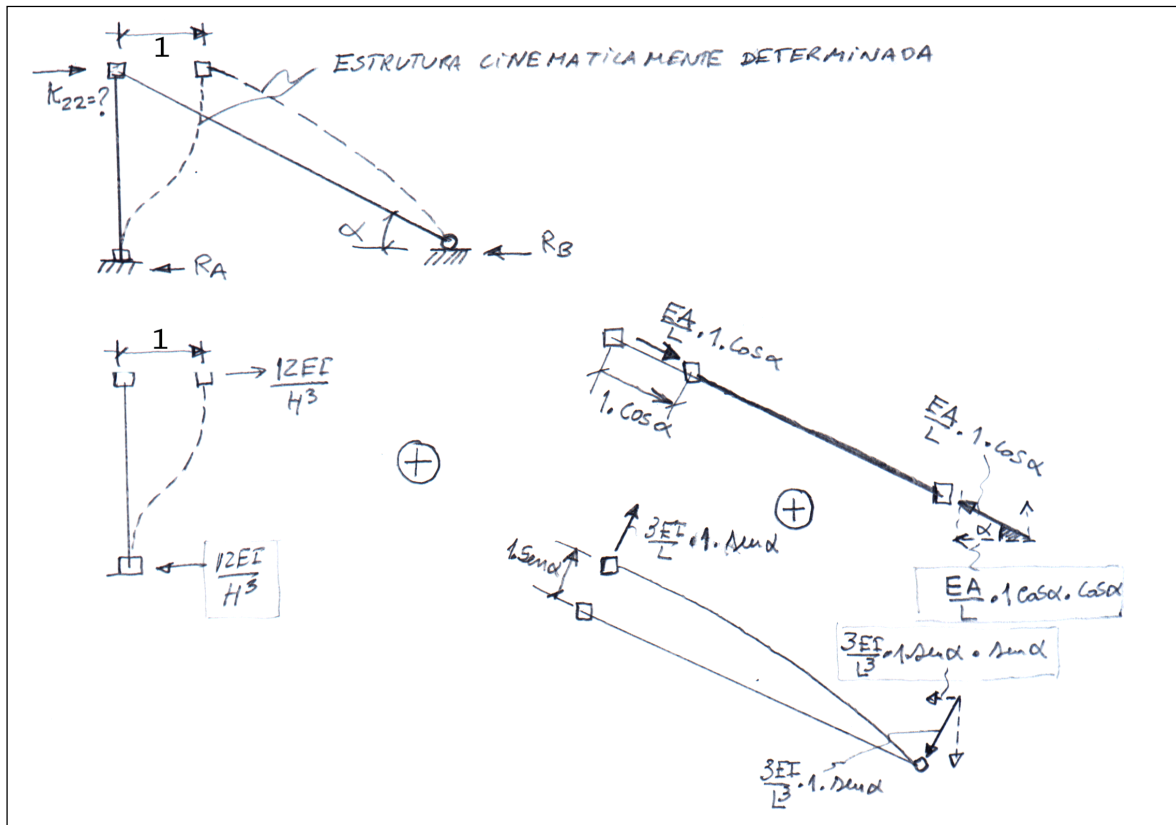


Figura 3.65 - Calculo de  $K_{22}$  por equilíbrio global da estrutura

De seguida faz-se a equação de equilíbrio para forças na direcção de  $k_{22}$ .

$$k_{22} = (R_A) + (R_B) = \left(\frac{12EI}{H^3}\right) + \left(\frac{EA}{L} * 1 * \cos \alpha * \cos \alpha + \frac{3EI}{L^3} * \sin \alpha * \sin \alpha\right) \quad (3.37)$$

### 3.9.3 - Cálculo das forças de fixação recorrendo ao P.T.V.

**A aplicação do PTV no cálculo de forças de fixação, pressupõe que a estrutura seja *a priori* cinematicamente determinada e que esteja sujeita a um estado de deformação ou de tensão inicial.**

Ora, a estrutura fundamental, é sempre cinematicamente determinada. O estado de deformação inicial, na estrutura fundamental, pode ser causado quer pela aplicação de cargas (o modo *zero*), ou pode ser causado pela imposição de um deslocamento (modos de deformação).

No modo zero as cargas de vão e as forças nodais de fixação  $Q_{i0}$  estão em equilíbrio com a distribuição de esforços internos (que são o integral de tensões internas em cada secção) na estrutura. No modo  $j$  (com  $j \neq 0$ ), o estado de deformação é causado pela imposição de um deslocamento unitário ( $d_j = 1$ ) segundo  $j$ , que gera tensões internas as quais estão em equilíbrio com as forças nodais de fixação,  $k_{ij}$  (coeficientes da matriz de rigidez).

O problema que tradicionalmente se põe é, para determinado modo de deformação, pretender quantificar, usando o PTV, o valor de uma das forças de fixação ( $k_{ij}$  ou  $Q_{i0}$  no modo zero), a que chamaremos, por *facilidade de exposição*, por **Força Incógnita** (ou desconhecida), “ $F_k$ ”.

A aplicação do PTV ao modo de deformação em causa consiste:

- (i) na imposição de um deslocamento virtual e unitário,  $d_k = \bar{1}$ , no sentido de “ $F_k$ ”;
- (ii) na medição dos trabalhos virtual externo,  $W_{ext}$ , e virtual interno,  $W_{int}$ , desenvolvidos;
- (iii) na aplicação do PTV, que garante a igualdades daqueles trabalhos, de onde resulta uma equação que será resolvida em ordem à força incógnita “ $F_k$ ”.

Portanto, à luz do Princípio dos Trabalhos Virtuais (ver B.2.1 e B.2.1.2), existe equilíbrio numa estrutura cinematicamente determinada quando o trabalho virtual externo  $W_{ext}$  é igual ao trabalho virtual interno  $W_{int}$  pelo que se escreve:

$$W_{ext} = W_{int} \quad (\text{B.22-rep})$$

Define-se por trabalho virtual externo,  $W_{ext}$ , aquele efectuado pelas forças nodais de fixação ( $k_{ij}$  ou  $Q_{i0}$ , consoante o modo em causa) quando se impõe um virtual unitário,  $\bar{1}$ , à estrutura.

$$W_{ext} = \sum_{j=1}^{\text{nodais}} \mathbf{F}_j \mathbf{D}_j = \mathbf{F}_k \times \bar{1} + \sum_{j=1, e, j \neq k}^{\text{nodais}} \mathbf{F}_j \mathbf{D}_j \quad (\text{B.23-rep})$$

Define-se por trabalho virtual interno,  $W_{int}$ , aquele efectuado pelas acções durante a imposição do deslocamento virtual. Pode demonstrar-se (ver B.2.1.2.1.) que esse trabalho é igual ao efectuado

pelos esforços de fixação de todas as secções "s", ( $E_{fix,s}$ ), que equilibram as acções de vão durante aquele deslocamento virtual.

$$W_{int} = \sum_k^{vão} E_{fix,s} D_s \tag{B.24-rep}$$

Substituindo (B.23) e (B.24) em (B.22) verifica-se ser possível determinar a força incógnita " $F_k$ ".

Concretizemos esta ideia na determinação de  $Q_{20}$  para estrutura com barras axialmente indeformáveis.

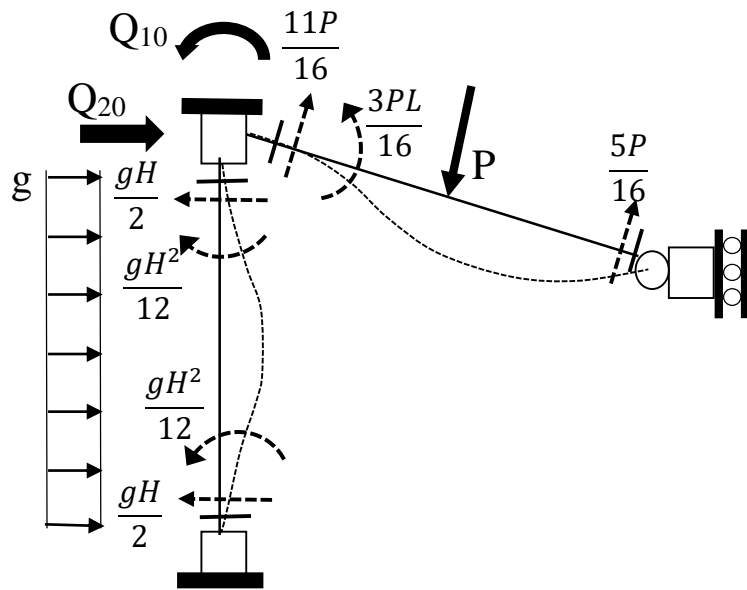


Figura 3.66 -Estrutura fundamental + Cargas de vão e Esforços de fixação

\O "estado inicial" é estrutura fundamental sujeita às cargas de vão (equivalentes ao conjunto de esforços de fixação) em equilíbrio com as forças,  $Q_{10}$  e  $Q_{20}$ . Como se pretende quantificar  $Q_{20}$ , impomos um deslocamento virtual unitário no sentido de  $Q_{20}$ , que será a força incógnita " $F_k$ ". A deformada *virtual* é a mostrada na figura 3.67, e que é cinematicamente determinada (Diagrama de deslocamentos virtual 2, "DDV2").

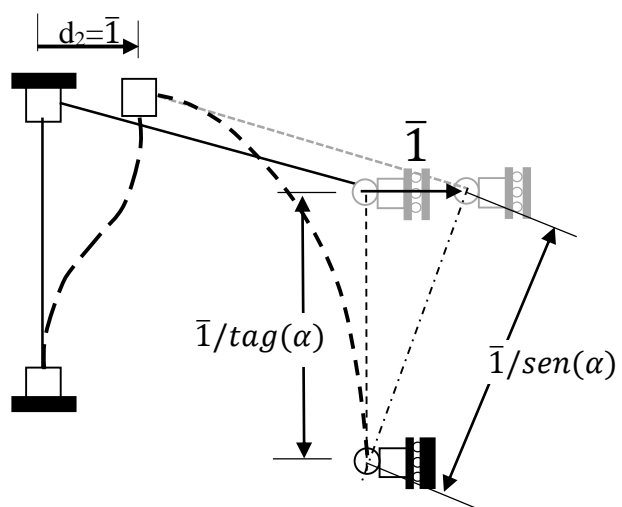


Figura 3.67 - "Diagrama" de deslocamentos e deformações virtuais (diagrama DDV2)

Neste instante já podemos calcular os trabalhos virtuais interno e externo.

O trabalho externo é o trabalho efectuado por todas as forças nodais de fixação:

$$W_{\text{ext}} = \mathbf{F}_k \mathbf{x} \bar{1} + \sum_{j=1; j \neq k}^{\text{nodais}} \mathbf{F}_j \mathbf{D}_j = \mathbf{Q}_{10} \mathbf{x}_0 + \mathbf{Q}_{20} \mathbf{x} \bar{1} = \mathbf{Q}_{20}$$

O trabalho interno é o trabalho efectuado pelos esforços de fixação actuantes nos extremos das barras e que equilibram as acções de vão:

$$W_{\text{int}} = \sum_{s=1}^{\text{vão}} \mathbf{E}_{\text{fx.s}} \mathbf{D}_s = \left(-\frac{\mathbf{gH}}{2}\right) * \bar{1} + \left(\frac{11}{16} \mathbf{P} \text{sen} \alpha\right) * \bar{1} - \left(\frac{5\mathbf{P}}{16} \cos \alpha\right) \frac{\bar{1}}{\tan \alpha}$$

Logo do enunciado do PTV, iguala-se  $W_{\text{ext}} = W_{\text{int}}$  o obtém-se a força de fixação pretendida:

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \Rightarrow \mathbf{Q}_{10} \mathbf{x}_0 + \mathbf{Q}_{20} \mathbf{x} \bar{1} = \left(-\frac{\mathbf{gH}}{2}\right) * \bar{1} + \left(\frac{11}{16} \mathbf{P} \text{sen} \alpha\right) * \bar{1} - \left(\frac{5\mathbf{P}}{16} \cos \alpha\right) \frac{\bar{1}}{\tan \alpha}$$

ou, imediatamente:

$$\mathbf{Q}_{20} = -\frac{\mathbf{gH}}{2} + \frac{11\mathbf{P}}{16} \text{sen} \alpha - \frac{5\mathbf{P} \cos \alpha}{16 \text{sen} \alpha} \cos \alpha = -\frac{\mathbf{gH}}{2} + \frac{\mathbf{P}}{16 \text{sen} \alpha} (11 \text{sen}^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha).$$

Torna-se evidente a grande utilidade e facilidade de aplicação deste princípio.

### 3.9.4 - Cálculo das forças de fixação recorrendo à mudança de base

Vamos determinar  $k_{22}$  e  $Q_{20}$  de uma estrutura axialmente indefornável (fig. 3.55-a)).

Consideremos como deslocamentos nodais independentes do sistema base 1 ( $d_1, d_2, d_3$ ) os apresentados na figura 3.50-b) de uma estrutura de barras axialmente deformáveis. Os deslocamentos nodais independentes do sistema base 2 são os da figura 3.55-b), aqui designados por  $d'_1$  e  $d'_2$ . Trata-se de uma estrutura com barras axialmente indefornáveis. A matriz de transformação entre os sistemas é  $[T]$ , obtida de:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{Bmatrix} \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix}$$

#### • Cálculo de $K'_{22}$

$$\begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix}$$

desenvolvendo obteremos:

$$k'_{22} = k_{22} - 2 * \operatorname{tg} \alpha * k_{23} + k_{33} * (\operatorname{tg}\alpha)^2$$

Obriga-nos a determinar os coeficientes  $k_{22}$  do segundo modo de deformação do sistema base 1, e os  $k_{23}$  e  $k_{33}$  do 3º modo de deformação do mesmo sistema. O resultado da expressão é o mesmo que o da igualdade 3.34.

#### • Cálculo de $Q'_{20}$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q'_{10} \\ Q'_{20} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ Q_{30} \end{Bmatrix}$$

Logo  $Q'_{20} = Q_{20} - \operatorname{tg}\alpha * Q_{30}$

que resultará igual a (3.36) sendo necessário determinar previamente  $Q_{20}$  e  $Q_{30}$  no sistema base 1.

#### 4- Algoritmo de Implementação Matricial do Método dos Deslocamentos

##### 4.1 - Etapas de Cálculo

Descreve-se a implementação matricial do método dos deslocamentos a uma estrutura reticulada plana. Indicar-se-ão as etapas de cálculo e discutem-se os diversos aspectos computacionais relevantes deste processo de cálculo.

##### Passo 1: Discretização da Estrutura. Definição do Referencial Global.

Desde já é necessário discretizar a estrutura. Consiste em numerar os nós, numerar e orientar as barras, numerar as secções críticas. Estas últimas são aquelas onde se pretende determinar esforços. A numeração dos nós deve ser tal que minimize a semibanda da matriz de rigidez se esta for bandada (ver 4.2.1).

Adopta-se um referencial global ( $X^*_1, X^*_2, X^*_3$ ) para a estrutura em relação ao qual se determina o número total de deslocamentos nodais independentes da estrutura da estrutura supondo que não tem apoios. Por conveniência de cálculo devem numerar-se primeiro os Graus de Liberdade "*livres*",  $\{d_L^*\}$ , (os que continuarão livres depois de inseridos os apoios) e a seguir os graus de liberdade "*restringidos*",  $\{d_R^*\}$  (os restantes). Os deslocamentos nodais independentes são ordenados no vector  $\{d^*\}^T = \{d_L^*; d_R^*\}$  representando o seu número total o número de graus de liberdade total,  $G_{Lt}$ , da estrutura.

##### Passo 2: Identificação dos Elementos Base. Matrizes de Rigidez Elementares.

Relativamente a cada uma das barras identifica-se qual o tipo de elemento finito (E-E, E-R, R-R, etc), identifica-se cada um dos graus de liberdade no referencial local da barra e que serão agrupados no vector  $\{q_m\}$  e determina-se o número de graus de liberdade elementar,  $G_{Le}$  (em geral 6). Identificam-se as matrizes de rigidez das barras em coordenadas locais, ou seja, as *matrizes de rigidez elementares*.

##### Passo 3: Construção das Matrizes de Rigidez Elementares no Referencial Global.

Considerando a orientação do referencial local da barra relativamente ao referencial global monta-se a matriz de transformação de coordenadas da barra  $m$ ,  $[T]_m$ . Em seguida a matriz de rigidez elementar da barra  $m$  em coordenadas locais  $[k]_m$ , é escrita em termos de coordenadas globais  $[k^*]_m$ . Recorre-se então à equação 3.28 de mudança mas com a nomenclatura presente. A matriz de rigidez elementar em coordenadas globais será então:

$$[k^*]_m = [T]_m^T \times [k]_m \times [T]_m \quad (4.1)$$

#### Passo 4: Espalhamento da Matriz de Rigidez Elementar pela Matriz Global

A rigidez associada a cada grau de liberdade da barra irá contribuir para a rigidez do correspondente grau de liberdade global da estrutura. Para se concretizar este objectivo há que previamente relacionar cada grau de liberdade elementar com um grau de liberdade global, ambos em coordenadas globais. Para esse fim elabora-se uma *tabela de incidências* ou contrói-se a *matriz booleana*  $[B]_m$ . Tanto a tabela como a matriz referidas relacionam os deslocamentos nodais elementares em coordenadas globais, agrupados no vector  $\{q^*\}_m$ , com os deslocamentos nodais globais, agrupados no vector  $\{d^*\}$ . Esta relação escreve-se:

$$\{q^*\}_m = [B]_m \times \{d^*\} \quad (4.2)$$

A matriz booleana  $[B]_m$ , constituída por zeros e uns, é em geral rectangular e tem  $G_{Le}$  linhas e  $G_{Lt}$  colunas. Salienta-se que  $\{q^*\}_m$  tem  $G_{Le}$  elementos e que  $\{d^*\}$  é um “super” vector com  $G_{Lt}$  elementos.

Ao processo que consiste na transferência de cada elemento da matriz de rigidez elementar para um determinado elemento da matriz de rigidez da estrutura completa se designa por *espalhamento* da matriz elementar pela matriz global. Os coeficientes da matriz de rigidez elementar da barra  $m$  em coordenadas globais,  $(k^*_{ij})_m$ , vão ocupar a posição  $K^*_{rs}$  da matriz de rigidez global de acordo com a seguinte transformação:

$$[k^*]_m = [B]_m^T \times [k]_m \times [B]_m = \dots \quad (4.3.a)$$

$$\dots = [B]_m^T \times [T]_m^T \times [k]_m \times [T]_m [B]_m \quad (4.3.b)$$

Repetindo este processo de espalhamento por todas as barras da estrutura, somam-se as contribuições de cada barra para cada grau de liberdade global. A este processo de acumulação chama-se *adição*. Ao conjunto dos processos espalhamento e adição designa-se por montagem ou a *assemblagem* da matriz de rigidez global da estrutura. A matriz de rigidez global é:

$$[k^*] = \sum_m [k^*]_m = \sum_m [B]_m^T \times [k]_m \times [B]_m = \sum_m [B]_m^T \times [T]_m^T \times [k]_m \times [T]_m [B]_m \quad (4.4)$$

sendo  $m$  o número total de barras.

Passo 5: Montagem do Vector Global de Forças de Fixação devido às cargas de vão em Coordenadas Globais,  $\{Q^*_0\}$ .

Por cada barra  $m$  determinam-se as forças nodais de fixação das cargas de vão, no referencial local,  $\{Q_0\}_m$ . De seguida faz-se uma mudança de coordenadas explicitando estas forças em termos de coordenadas globais,  $\{Q^*_0\}_m$ :

$$\{Q^*_0\}_m = [T]^T_m \times \{Q_0\}_m \quad (4.5)$$

É agora possível realizar o espalhamento de  $\{Q^*_0\}_m$  por  $\{Q^*_0\}$  recorrendo a  $[B]^T_m$ . Considerando a contribuição de todas as  $m$  barras procede-se adição terminando assim a assemblagem no vector  $\{Q^*_0\}$ :

$$\{Q^*_0\} = \sum_m [B]^T_m \times \{Q^*_0\}_m = \sum_m [B]^T_m \times [T]^T_m \times \{Q_0\}_m \quad (4.6)$$

Passo 6: Vector de Forças Aplicadas e Construção do Vector de Termos Independentes,  $\{F^*\}$

As forças nodais directamente aplicadas nos nós devem ser definidas em coordenadas globais, compondo o vector  $\{Q^*\}$ . O vector de termos independentes é então definido por

$$\{F^*\} = \{Q^*\} - \{Q^*_0\} \quad (4.7)$$

Passo 7: Escrita da Equação do Método dos Deslocamentos

Neste instante a equação do método dos deslocamentos é um sistema com  $G_{Ll}$  equações que se escreve:

$$[k^*] \times \{d^*\} = \{F^*\} \quad (4.8)$$

Cada uma das equações tem correspondência relativamente a cada grau de liberdade da estrutura global livre, ou seja, da estrutura sem apoios. É como se a estrutura estivesse livre no espaço podendo deslocar-se como corpo rígido. Nestas circunstâncias o sistema referido é um sistema de equações dependentes, com solução indeterminada.



**Passo 8:** Imposição das Condições de Fronteira

Há que impor ao sistema de equações 4.8 restrições equivalentes aos impedimentos dos graus de liberdade restringidos pelos apoios. Dos  $\{d^*\}$  deslocamentos nodais, haverá um certo número de deslocamentos nodais restringidos nos nós de apoio,  $\{d^*_R\}=\{0\}$ , sendo os restantes,  $\{d^*_L\}$ , os deslocamentos nodais dos livres.

Em termos algébricos, impor as condições de apoio ao sistema consiste em eliminar do sistema as equações associadas ao equilíbrio de forças no sentido dos graus de liberdade restringidos, o que corresponde, na equação de equilíbrio matricial, a retirar da matriz de rigidez as linhas e colunas associadas aos graus de liberdade restringidos ficando o sistema **reduzido** apenas às equações associadas aos graus de liberdade livres. (Em alternativa poderemos reordenar do sistema de equações deixando para último lugar, por exemplo, as equações associadas aos graus de liberdade restringidos). A equação 4.8 escreve-se então na seguinte forma :

$$\begin{bmatrix} K_{LL}^* & K_{LR}^* \\ K_{RL}^* & K_{RR}^* \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_L^* \\ d_R^* = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L^* \\ F_R^* \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

**Passo 9:** Resolução da Equação do Método dos Deslocamentos. Cálculo de  $\{d_L^*\}$  e de  $\{d^*\}$ .

Resolvendo o sub-sistema "*reduzido*" associado aos graus de liberdade livres:

$$[K_{LL}^*] x \{d_L^*\} = \{F_L^*\} \quad (4.10)$$

obtemos os deslocamentos nodais  $\{d_L^*\}$ . Visto que os vectores  $\{d_L^*\}$  e  $\{d_R^*\}$  são conhecidos,

remontamos o vector de deslocamentos global  $\begin{Bmatrix} d_L^* \\ d_R^* \end{Bmatrix}$  e tornamos a reordenar os seus elementos de

acordo com a sequência inicial (aquela adoptada no passo 1) obtendo-se o vector global  $\{d^*\}$ .

**Passo 10:** Cálculo de Reacções de Apoio.

As reacções de apoio no referencial global obtêm-se a partir da *exploração* da segunda equação da igualdade 4.9 :

$$\{F_R^*\} = [K_{RL}^*] * \{d_L^*\} \quad (4.11)$$

O vector  $\{F^*_R\}$  é um subvector de  $\{F\}$  definido por (4.7) que se pode rescrever como:

$$\{F^*\} = \{Q^*\} - \{Q_0^*\} \Rightarrow \tag{4.7-rep}$$

$$\begin{Bmatrix} F_L^* \\ F_R^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_L^* \\ Q_R^* \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_{0L}^* \\ Q_{0R}^* \end{Bmatrix} \tag{4.12}$$

sendo  $Q_L^*$  as forças exteriores nodais directamente aplicadas aos nós livres, vulgarmente designadas por cargas nodais aplicadas, e  $Q_R^*$  as forças exteriores nodais directamente aplicadas aos nós restringidos as quais se designam por reacções de apoio. Por outro lado, as forças  $Q_{0L}^*$  e  $Q_{0R}^*$ , são as forças de fixação das acções de vão aplicadas respectivamente aos nós livres e restringidos. O sentido positivo destas forças continua a ser o adoptado pelo referencial global. Considerando a segunda linha da igualdade (4.12) e a expressão (4.11) obteremos a seguinte definição de reacção de apoio:

$$\{Q_R^*\} = [K_{RL}^*] * \{d_L^*\} + \{Q_{0R}^*\} \tag{4.13}$$

**Passo 11:** Cálculo de Esforços nas Barras.

Os esforços na barra  $m$  determinam-se seguindo as seguintes etapas:

(i) Seleccionar do vector  $\{d^*\}$  os deslocamentos nodais da barra  $m$  em coordenadas globais,  $\{q^*\}_m$ .

$$\{q^*\}_m = [B]_m * \{d^*\} \tag{4.2-rep}$$

(ii) Escrever os deslocamentos nodais da barra  $m$  em coordenadas locais.

$$\{q\}_m = [T]_m * \{q^*\}_m = [T]_m * [B]_m * \{d^*\} \tag{4.14}$$

(iii) Determinar os esforços finais no referencial local

$$\{X\}_m = \{X_C\}_m + \{X_0\}_m \tag{4.15-a}$$

$$\{X\}_m = [T_E] * (\{Q_C\}_m + \{Q_0\}_m) \tag{4.15-b}$$

$$\{X\}_m = [T_E] * ([K]_m * \{q\}_m + \{Q_0\}_m) \tag{4.15-c}$$

$$\{X\}_m = ([T_E] * [K]_m) * \{q\}_m + [T_E] * \{Q_0\}_m \tag{4.15-e}$$

$$\{X\}_m = [E]_m * \{q\}_m + \{X_0\}_m \tag{4.15-f}$$

sendo  $[T_E]$  a matriz de transformação de esforços. Esta matriz converte as forças nodais independentes (no referencial local) da barra  $m$ ,  $\{Q\}_m$  em esforços independentes nas secções

críticas de acordo com os sinais de Resistência de Materiais,  $\{X\}_m$ , como se mostra na figura 4.1 e na relação 4.15.

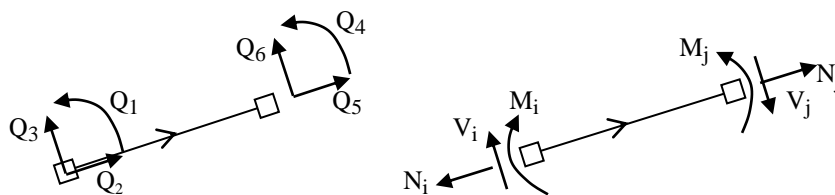


Figura 4.1 - Forças nodais independentes,  $\{Q\}_m$ , e esforços independentes,  $\{X\}_m$ .

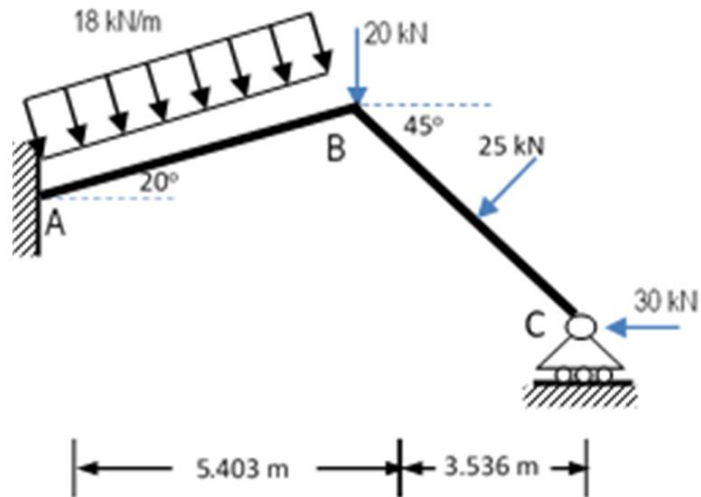
$$\{X\}_m = [T_E]_x \{Q\}_m \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_i \\ N_i \\ V_i \\ M_j \\ N_j \\ V_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

**4.1.1 - Exemplo 4.1:** Pode ser realizado em Excel, SMath Studio, SCILAB, etc. Neste caso foi em SMath Studio.

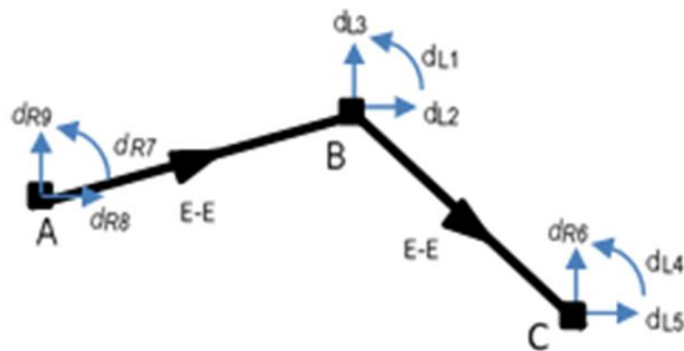
**Exemplo de aplicação do Método dos Deslocamentos**

Cálculos Preliminares

Barra	Compr L	EA	EA/L	EI	EI/L	EI/L <sup>2</sup>	EI/L <sup>3</sup>	ângulo	coseno	seno
		10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>			
1	5.75	6.96	1.21	0.3712	64556	11227	1952	20	0.9400	0.3420
2	5	6.96	1.39	0.3712	74200	14848	2970	-45	0.7071	-0.7071



**Passo 1**



**Passo 2**

Barra 1: tipo E-E - 6 graus de liberdade elementares

Barra 2: tipo E-E - 6 graus de liberdade elementares

A matriz de rigidez para ambas as barras está definida na equação 2.8

**Passo 3 - Matrizes de transformação de coordenadas**

$$T1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9397 & 0.342 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.342 & 0.9397 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9397 & 0.342 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.342 & 0.9397 \end{bmatrix}$$

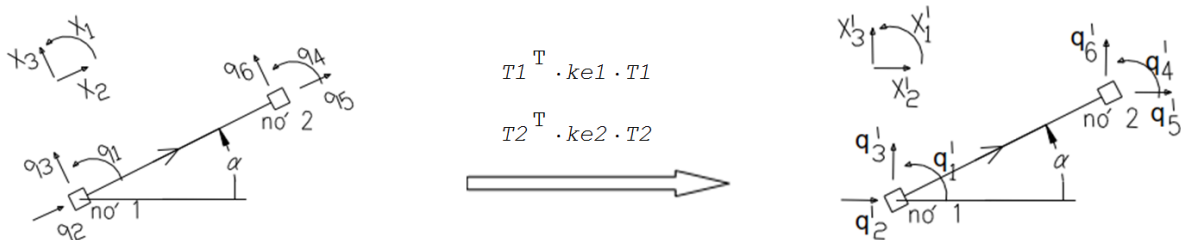
$$T2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

Matrizes de rigidez elementares em coordenadas LOCAIS

$$ke1 = \begin{bmatrix} 258226 & 0 & 67363 & 129113 & 0 & -67363 \\ 0 & 1210435 & 0 & 0 & -1210435 & 0 \\ 67363 & 0 & 23431 & 67363 & 0 & -23431 \\ 129113 & 0 & 67363 & 258226 & 0 & -67363 \\ 0 & -1210435 & 0 & 0 & 1210435 & 0 \\ -67363 & 0 & -23431 & -67363 & 0 & 23431 \end{bmatrix}$$

$$ke2 = \begin{bmatrix} 296960 & 0 & 89088 & 148480 & 0 & -89088 \\ 0 & 1392000 & 0 & 0 & -1392000 & 0 \\ 89088 & 0 & 35635 & 89088 & 0 & -35635 \\ 148480 & 0 & 89088 & 296960 & 0 & -89088 \\ 0 & -1392000 & 0 & 0 & 1392000 & 0 \\ -89088 & 0 & -35635 & -89088 & 0 & 35635 \end{bmatrix}$$

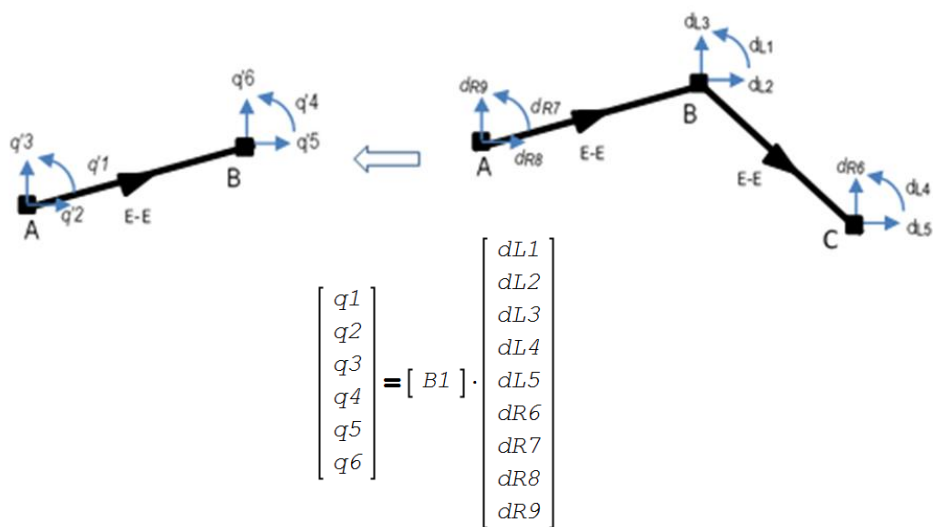
Matrizes de rigidez elementares em coordenadas GLOBAIS



$$T1^T \cdot ke1 \cdot T1 = \begin{bmatrix} 258226 & -23040 & 63301 & 129113 & 23040 & -63301 \\ -23040 & 1071582 & 381496 & -23040 & -1071582 & -381496 \\ 63301 & 381496 & 162284 & 63301 & -381496 & -162284 \\ 129113 & -23040 & 63301 & 258226 & 23040 & -63301 \\ 23040 & -1071582 & -381496 & 23040 & 1071582 & 381496 \\ -63301 & -381496 & -162284 & -63301 & 381496 & 162284 \end{bmatrix}$$

$$T2^T \cdot ke2 \cdot T2 = \begin{bmatrix} 296960 & 62995 & 62995 & 148480 & -62995 & -62995 \\ 62995 & 713818 & -678182 & 62995 & -713818 & 678182 \\ 62995 & -678182 & 713818 & 62995 & 678182 & -713818 \\ 148480 & 62995 & 62995 & 296960 & -62995 & -62995 \\ -62995 & -713818 & 678182 & -62995 & 713818 & -678182 \\ -62995 & 678182 & -713818 & -62995 & -678182 & 713818 \end{bmatrix}$$

**Passo 4 - Matrizes Booleanas**



$$B1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento da matriz  $[k^*]_1$  pela matriz global  $[k^*]$

$$KG1 := B1^T \cdot T1^T \cdot ke1 \cdot T1 \cdot B1$$

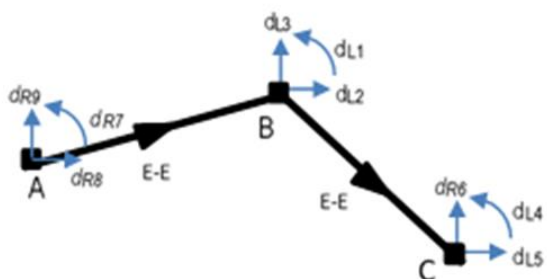
$$KG1 = \begin{bmatrix} 258226 & 23040 & -63301 & 0 & 0 & 0 & 129113 & -23040 & 63301 \\ 23040 & 1071582 & 381496 & 0 & 0 & 0 & 23040 & -1071582 & -381496 \\ -63301 & 381496 & 162284 & 0 & 0 & 0 & -63301 & -381496 & -162284 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 129113 & 23040 & -63301 & 0 & 0 & 0 & 258226 & -23040 & 63301 \\ -23040 & -1071582 & -381496 & 0 & 0 & 0 & -23040 & 1071582 & 381496 \\ 63301 & -381496 & -162284 & 0 & 0 & 0 & 63301 & 381496 & 162284 \end{bmatrix}$$

e Espalhamento da matriz  $[k^*]_2$  pela matriz global  $[k^*]$

$$KG2 := B2^T \cdot T2^T \cdot ke2 \cdot T2 \cdot B2$$

$$KG2 = \begin{bmatrix} 296960 & 62995 & 62995 & 148480 & -62995 & -62995 & 0 & 0 & 0 \\ 62995 & 713818 & -678182 & 62995 & -713818 & 678182 & 0 & 0 & 0 \\ 62995 & -678182 & 713818 & 62995 & 678182 & -713818 & 0 & 0 & 0 \\ 148480 & 62995 & 62995 & 296960 & -62995 & -62995 & 0 & 0 & 0 \\ -62995 & -713818 & 678182 & -62995 & 713818 & -678182 & 0 & 0 & 0 \\ -62995 & 678182 & -713818 & -62995 & -678182 & 713818 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Assemblagem da matriz de rigidez global**



$$KG = \begin{bmatrix} 555186 & 86034 & -306 & 148480 & -62995 & -62995 & 129113 & -23040 & 63301 \\ 86034 & 1785399 & -296687 & 62995 & -713818 & 678182 & 23040 & -1071582 & -381496 \\ -306 & -296687 & 876101 & 62995 & 678182 & -713818 & -63301 & -381496 & -162284 \\ 148480 & 62995 & 62995 & 296960 & -62995 & -62995 & 0 & 0 & 0 \\ -62995 & -713818 & 678182 & -62995 & 713818 & -678182 & 0 & 0 & 0 \\ -62995 & 678182 & -713818 & -62995 & -678182 & 713818 & 0 & 0 & 0 \\ 129113 & 23040 & -63301 & 0 & 0 & 0 & 258226 & -23040 & 63301 \\ -23040 & -1071582 & -381496 & 0 & 0 & 0 & -23040 & 1071582 & 381496 \\ 63301 & -381496 & -162284 & 0 & 0 & 0 & 63301 & 381496 & 162284 \end{bmatrix}$$

**Passo 5 - Vectors  $\{Q_0\}_1$  e  $\{Q_0\}_2$  em coordenadas locais**

$$M01 := \frac{18 \cdot 5.75^2}{12} = 49.6 \quad V01 := 18 \cdot \frac{5.75}{2} = 51.8 \quad M02 := \frac{25 \cdot 5}{8} = 15.625 \quad V02 := \frac{25}{2} = 12.5$$

$$Q01 := \begin{bmatrix} M01 \\ 0 \\ V01 \\ -M01 \\ 0 \\ V01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49.6 \\ 0 \\ 51.8 \\ -49.6 \\ 0 \\ 51.8 \end{bmatrix}$$

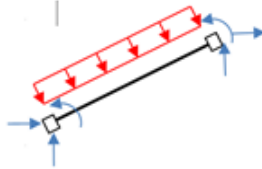
$$Q02 := \begin{bmatrix} M02 \\ 0 \\ V02 \\ -M02 \\ 0 \\ V02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.6 \\ 0 \\ 12.5 \\ -15.6 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

Vectores  $\{Q_0\}_1$  e  $\{Q_0\}_2$  em coordenadas globais

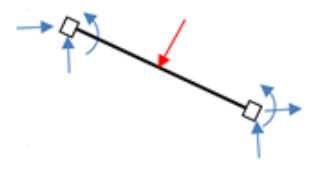
$$\{Q^*_0\}_1 = [T]_1^T \times \{Q_0\}_1 =$$

$$\{Q^*_0\}_2 = [T]_2^T \times \{Q_0\}_2 =$$

$$Q01_G := T1^T \cdot Q01 = \begin{bmatrix} 49.6 \\ -17.7 \\ 48.6 \\ -49.6 \\ -17.7 \\ 48.6 \end{bmatrix}$$



$$Q02_G := T2^T \cdot Q02 = \begin{bmatrix} 15.6 \\ 8.8 \\ 8.8 \\ -15.6 \\ 8.8 \\ 8.8 \end{bmatrix}$$



Espalhamento de  $\{Q^*_0\}_{1G}$  e  $\{Q^*_0\}_{2G}$  em  $\{Q^*_0\}_G$  e assemblagem

$$+ \text{Barra 1} \quad Q01G_G := B1^T \cdot Q01_G = \begin{bmatrix} -49.6 \\ -17.7 \\ 48.6 \\ 0 \\ 0 \\ 49.6 \\ -17.7 \\ 48.6 \end{bmatrix}$$

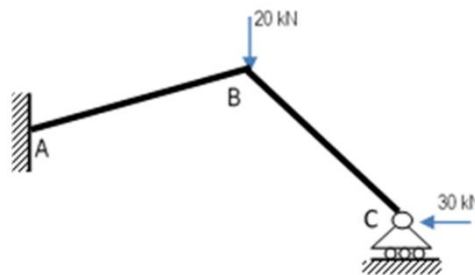
$$\text{Barra 2} \quad Q02G_G := B2^T \cdot Q02_G = \begin{bmatrix} 15.6 \\ 8.8 \\ 8.8 \\ -15.6 \\ 8.8 \\ 8.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ADIÇÃO: Barra 1 + Barra 2

$$Q0G := Q01G_G + Q02G_G = \begin{bmatrix} -34 \\ -8.9 \\ 57.5 \\ -15.6 \\ 8.8 \\ 8.8 \\ 49.6 \\ -17.7 \\ 48.6 \end{bmatrix}$$

**Passo 6** - Vector de forças nodais aplicadas  $\{Q^*\}$  e vector de termos independentes  $\{F^*\} = \{Q^*\} - \{Q^*_0\}$

$$Q := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Vector de termos independentes  $\{F^*\} = \{Q^*\} - \{Q^*_0\}$

$$F := Q - Q0G = \begin{bmatrix} 34 \\ 8.9 \\ -77.5 \\ 15.6 \\ -38.8 \\ -8.8 \\ -49.6 \\ 17.7 \\ -48.6 \end{bmatrix}$$



**Passo 7** Equação do Método dos deslocamentos :  $[k^*]x\{d^*\}=\{F^*\}$

555186	86034	-306	148480	-62995	-62995	129113	-23040	63301	$dL1$	29.8
86034	1785399	-296687	62995	-713818	678182	23040	-1071582	-381496	$dL2$	8.1
-306	-296687	876101	62995	678182	-713818	-63301	-381496	-162284	$dL3$	-75.4
148480	62995	62995	296960	-62995	-62995	0	0	0	$dL4$	15.6
-62995	-713818	678182	-62995	713818	-678182	0	0	0	$dL5$	-38.8
-62995	678182	-713818	-62995	-678182	713818	0	0	0	$dR6$	-8.8
129113	23040	-63301	0	0	0	258226	-23040	63301	$dR7$	-45.4
-23040	-1071582	-381496	0	0	0	-23040	1071582	381496	$dR8$	16.9
63301	-381496	-162284	0	0	0	63301	381496	162284	$dR9$	-46.5

**Passo 8** Redução da equação do método dos deslocamentos

$$d_{R6}^* = d_{R7}^* = d_{R8}^* = d_{R9}^* = 0$$

$$[K^*] * \{d_G^*\} = \{F^*\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} K_{LL}^* & K_{LR}^* \\ K_{RL}^* & K_{RR}^* \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_L^* \\ d_R^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L^* \\ F_R^* \end{Bmatrix}$$

Nota Importante: Na igualdade matricial as primeiras cinco equações dizem respeito ao equilíbrio nodal segundo grau de liberdade livres e as restantes aos restringidos do que resulta a arrumação dos coeficientes de rigidez nas submatrizes  $[K_{LL}]$   $[K_{LR}]$   $[K_{RL}]$   $[K_{RR}]$ . Resultou assim porque houve no início a preocupação de numerar primeiro os GL livres. Caso contrário as equações respeitantes a GL livres e restringidas surgiriam algo misturadas entre si. Para se colocarem arrumadas em bloco, como acima, haveria que implementar uma operação adicional que seria a troca de ordem das equações, que causam na equação matricial a troca de linhas nas equações e de linhas e colunas na matriz de rigidez. Para essa operação, consoante outros objectivos, também se podem usar técnicas de transformação de base ou outras.

**PASSO 9:** Resolução do sistema  $[k^*_{LL}]x\{d^*_L\}=\{F^*_L\}$ . Montagem de  $\{d^*_G\}$

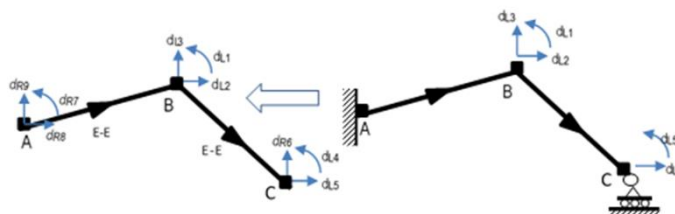
Podemos reduzir a equação do passo 8 à apresentada no título do passo 9 deduzindo antes a seguinte matriz  $[RL]$

Matriz booleana para graus de liberdade livres  
 $d_{GLG} = RL * d_{Livres}$

$$\begin{Bmatrix} dL1 \\ dL2 \\ dL3 \\ dL4 \\ dL5 \\ dR6 \\ dR7 \\ dR8 \\ dR9 \end{Bmatrix} = [RL] \cdot \begin{Bmatrix} dL1 \\ dL2 \\ dL3 \\ dL4 \\ dL5 \end{Bmatrix}$$

(a)

$$RL := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$KGR := RL^T \cdot KG \cdot RL \quad KGR = \begin{bmatrix} 555186 & 86034 & -306 & 148480 & -62995 \\ 86034 & 1785399 & -296687 & 62995 & -713818 \\ -306 & -296687 & 876101 & 62995 & 678182 \\ 148480 & 62995 & 62995 & 296960 & -62995 \\ -62995 & -713818 & 678182 & -62995 & 713818 \end{bmatrix}$$

$$FL := RL^T \cdot F \quad FL := RL^T \cdot F = \begin{Bmatrix} 34 \\ 8.9 \\ -77.5 \\ 15.6 \\ -38.8 \end{Bmatrix}$$

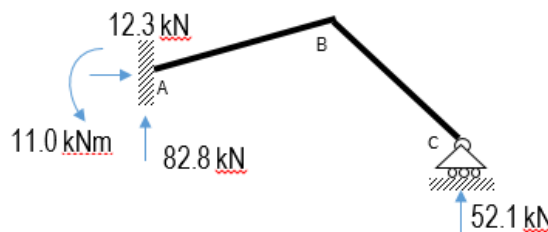
logo:  $\{d^*_L\} = [k^*_{LL}]^{-1} \times \{F^*_L\} = \begin{pmatrix} 0.00004 \\ 0.00025 \\ -0.00079 \\ 0.00035 \\ 0.00098 \end{pmatrix}$  .Da relação (a) obtemos o vector de deslocamentos

globais,  $\{d^*_G\} = \begin{pmatrix} 0.00004 \\ 0.00025 \\ -0.00079 \\ 0.00035 \\ 0.00098 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**PASSO 10:** Cálculo das reacções de apoio  $\{Q^*_R\} = [k^*_{RL}]^* \{d^*_L\} + \{Q^*_{0R}\}$

Do passo 7 obtemos directamente a matriz  $[k^*_{RL}]$ , que multiplicada pelo vector  $\{d^*_L\}$  do passo anterior e somada ao subvector  $\{Q^*_{0R}\}$  do vector final  $\{Q^*_{0G}\}$  do passo 5 se obtém as reacções de apoio:

$$\{Q^*_R\} = \begin{pmatrix} 52.1 \\ 110.0 \\ 12.3 \\ 82.8 \end{pmatrix}$$



Em alternativa podemos deduzir a matriz de transformação  $[RR]$  que relaciona os GL globais com os GL restringidos:  $\{d^*_G\} = [RR]^* \{d^*_R\}$  (à semelhança do que se faz na igualdade (a) do passo 9).

Sabendo que :  $[k^*_{RL}] = [RR]^T * [K^*_G] [RR]$ , que  $\{d^*_L\} = [RL]^T * \{d^*_G\}$  e que  $\{Q^*_{0R}\} = [RR]^T * \{Q^*_{0G}\}$

substituindo em  $\{Q^*_R\} = [k^*_{RL}]^* \{d^*_L\} + \{Q^*_{0R}\}$  fica:

$$\{Q^*_R\} = [RR]^T * [K^*_G]^* \{d^*_G\} + [RR]^T * \{Q^*_{0G}\}$$

**PASSO 11:** Calculo de esforços nas barras

Barra 1 – deslocamentos em coordenadas LOCAIS e Forças de equilíbrio Locais

$$q1 := T1 \cdot B1 \cdot RL \cdot dL = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.000038 \\ -0.0000329 \\ -0.000824 \end{pmatrix} \quad Q1 := ke1 \cdot q1 + Q01 = \begin{pmatrix} 110 \\ 39.9 \\ 73.6 \\ 15.7 \\ -39.9 \\ 29.9 \end{pmatrix}$$

Barra 2 – deslocamentos em coordenadas LOCAIS e Forças de equilíbrio Locais

$$q2 := T2 \cdot B2 \cdot RL \cdot dL = \begin{pmatrix} 0.000038 \\ 0.0007329 \\ -0.0003781 \\ 0.0003544 \\ 0.0006911 \\ 0.0006911 \end{pmatrix} \quad Q2 := ke2 \cdot q2 + Q02 = \begin{pmatrix} -15.7 \\ 58.1 \\ 9.4 \\ 2.9 \cdot 10^{-13} \\ -58.1 \\ 15.6 \end{pmatrix}$$

Matriz [TE] de transformação de forças nodais locais em esforços:

$$\begin{matrix} \text{Esforço} & = & [\text{TE}] * & \text{Força Nodal} \\ M_i & & & Q_1 \\ N_i & & & Q_2 \\ V_i & = & [\text{TE}] * & Q_3 \\ M_j & & & Q_4 \\ N_j & & & Q_5 \\ V_j & & & Q_6 \end{matrix} \quad \text{TE} := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**Esforços Finais nas Barras**

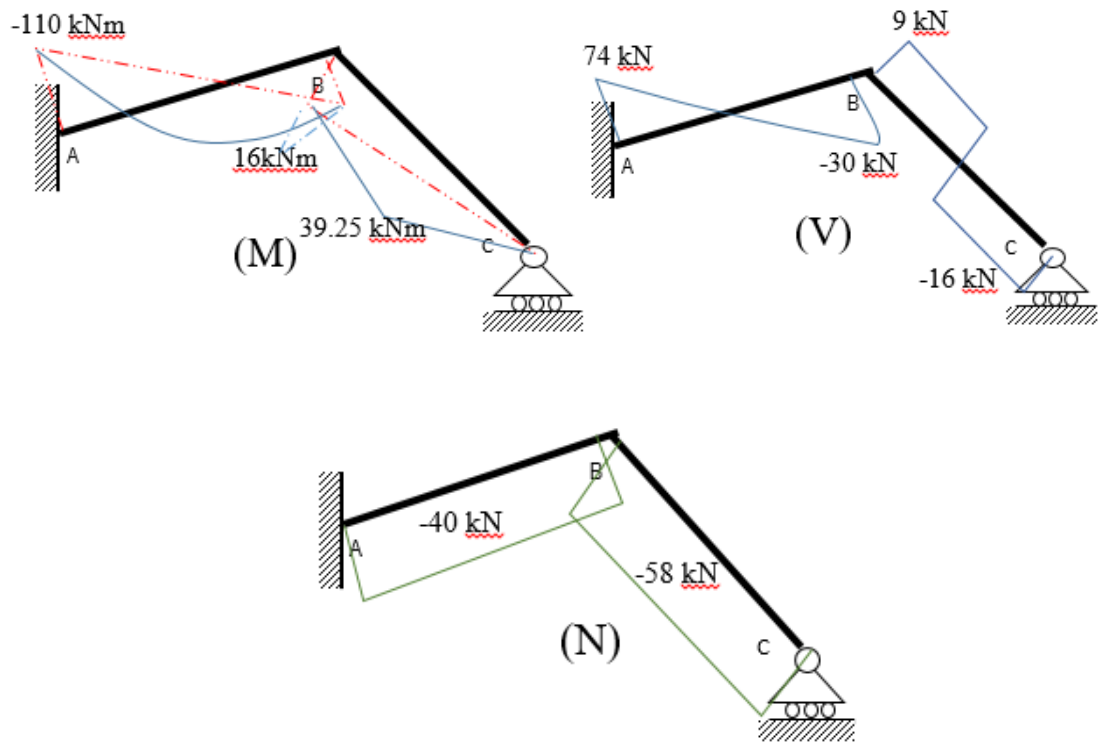
Barra 1

$$X_1 := \text{TE} \cdot Q_1 = \begin{bmatrix} -110 \\ -40 \\ 74 \\ 16 \\ -40 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Barra 2

$$X_2 := \text{TE} \cdot Q_2 = \begin{bmatrix} 16 \\ -58 \\ 9 \\ 3 \cdot 10 \\ -13 \\ -16 \end{bmatrix}$$

**Diagramas de esforços**



**4.1.2 - Exemplo 4.1:**

Exemplifica-se uma lista de instruções possível para resolver o problema anterior em SCILAB. Lembra-se que o programa e as subrotinas Mke() e MTc() devem estar na mesma directoria que o próprio programa, e actualizar "D:\2-DISCIPLINAS \ 7 - OUTRAS\_DISCIPLINAS \INFORMATICA\Exercicios\")

Facilmente e rapidamente pode fazer alterações para resolver outras estruturas pequenas.

```
//Cálculo de uma estrutura plana
// Inicialização das rotinas Mke() e MTc()
chdir("D:\2-DISCIPLINAS\7-OUTRAS_DISCIPLINAS\INFORMATICA\Exercicios\")
clear
exec("Mke.sci")
exec("MTc.sci")
//dados da estrutura
NBAR=2;nGLG=9;nGLGR=4;
nGLGL=nGLG-nGLGR; // numero de GL que ficam livres depois dos apoios
vGLGR=[6,7,8,9]; // vector com os GLG que devem ficar restringidos
E=29e6
L1=5.75;alfa1=20;A1=0.3*0.8;I1=0.3*0.8^3/12
L2=5.00;alfa2=-45;A2=0.3*0.8;I2=0.3*0.8^3/12

// Forcas de fixação de cargas de vão barra 1, Q01()
Q01(1)=18*L1^2/12;Q01(2)=0;Q01(3)=18*L1/2;
Q01(4)=-18*L1^2/12;Q01(5)=0;Q01(6)=18*L1/2;

// Forcas de fixação de cargas de vão barra 2, Q02()
Q02(1)=25*L2/8;Q02(2)=0;Q02(3)=25/2;
Q02(4)=-25*L2/8;Q02(5)=0;Q02(6)=25/2;

// Matrizes Booleanas B1() e B2(), GLE = B()*GLG()
// Barra 1
B1=zeros(6,nGLG);B1(1,7)=1;B1(2,8)=1;B1(3,9)=1;B1(4,1)=1;
B1(5,2)=1;B1(6,3)=1;

// Barra 2
B2=zeros(6,nGLG);B2(1,1)=1;B2(2,2)=1;B2(3,3)=1;B2(4,4)=1;
B2(5,5)=1;B2(6,6)=1;

// INICIO do calculo
// Rigidez elementar em coordenadas blobais, ke1() e ke2()
EI1=E*I1;EA1=E*A1;ke1=Mke(EI1,EA1,L1);
EI2=E*I2;EA2=E*A2;ke2=Mke(EI2,EA2,L2);

// Matrizes de Transformação de coordenadas, Tc1() e Tc2()
C1=cos(alfa1*pi/180);S1=sin(alfa1*pi/180);Tc1=MTc(C1,S1);
C2=cos(alfa2*pi/180);S2=sin(alfa2*pi/180);Tc2=MTc(C2,S2);

// Matrizes de rigidezes globais em coodenadas globais, KG1() e KG2()
// - Espalhamento
KG1=B1'*Tc1'*ke1*Tc1*B1;
KG2=B2'*Tc2'*ke2*Tc2*B2;

// Matriz global da estrutura, KG()
// - Adição
KG= KG1+KG2;

// Forcas de fixação de cargas de vão em coord. Globais, Q01G(),Q02G()
// - Espalhamento
Q01G=B1'*Tc1'*Q01;
Q02G=B2'*Tc2'*Q02;

// Força de Fixação Global, Q0G()
```

```

// -Adição
Q0G=Q01G+Q02G

// Vector de forças externas aplicadas nos nós, Q()
Q=zeros(nGLG,1);Q(3,1)=-20;Q(5,1)=-30

// Vector de Forças Independentes F()= Q() - Q0G()
F=Q-Q0G
// Equação de equilíbrio da estrutura livre (sem apoios) KG()*d()==F()

// RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES
// ===== Processo 1 - via redução do sistema =====
// Matriz de redução GLLivres para GLGlobais, TL()

TL=zeros(nGLG,nGLGL);
TL(1,1)=1;TL(2,2)=1;TL(3,3)=1;TL(4,4)=1;TL(5,5)=1;
// Equação de equilíbrio reduzida
KGR=TL'*KG*TL;
FR=TL'*F;
// Deslocamentos nodais livres (resolução do sistema de equações)
dL=inv(KGR)*FR;
// Vector de deslocamentos (livres + restringidos) global
d=TL*dL;
//=====

// ===== Processo 2 - Método da substituição =====

// vector de graus de liberdade restringidos (dado do problema)
for i=1:nGLGR
p=vGLGR(i);
for j= 1 : nGLG
KG(p,j)=0;KG(j,p)=0;
end
KG(p,p)=1;F(p)=0;
end

// Resolução do sistema de equações
d=inv(KG)*F;
//=====

// CALCULO de DESLOCAMENTOS E DE ESFORÇOS NAS BARRAS
// Vectors de deslocamentos nodais das barras 1 e 2 em coord. locais
q1=Tc1*B1*d;
q2=Tc2*B2*d;

// Forças nodais de equilíbrio nas barras 1 e 2
Q1= ke1*q1+Q01;
Q2= ke2*q2+Q02;

// Esforços nas barras
// matriz de transformação de forças nodais em esforços nodais, TE
TE= eye(6,6);TE(1,1)=-1;TE(2,2)=-1;TE(6,6)=-1
// Esforços nodais finais nas barras 1 e 2
X1 = TE*Q1
X2 = TE*Q2

// ===== F I M =====
=====

function ke=Mke(EI, EA, L) // Matriz de rigidez de barra encastrada encastrada

```

```

ke=zeros(6,6)
ke(1,1)=4*EI/L;ke(4,4)=ke(1,1)
ke(1,4)=2*EI/L;
ke(1,3)=6*EI/L^2;ke(1,6)=-ke(1,3);ke(3,4)=ke(1,3);ke(4,6)=-ke(1,3);
ke(2,2)=EA/L;ke(2,5)=-ke(2,2);ke(5,5)=ke(2,2)
ke(3,3)=12*EI/L^3;ke(6,6)=ke(3,3);ke(3,6)=-ke(3,3);
for i=2:6
    for j=1:i
        ke(i,j)=ke(j,i)
    end
end
endfunction

```

```

=====
function Tc=MTc(C, S) // Matriz de transformação de coordenadas
    Tc=eye(6,6)
    Tc(2,2)=C;Tc(2,3)=S;Tc(3,2)=-S;Tc(3,3)=C;
    Tc(5,5)=C;Tc(5,6)=S;Tc(6,5)=-S;Tc(6,6)=C;
endfunction
=====
=====

```

## 4.2 – Alguns aspectos a considerar

### 4.2.1- Semibanda

Como resultado do espalhamento e assemblagem da matriz de rigidez global, traduzida pela equação 4.4, os coeficientes de rigidez elementares irão “espalhar-se” pela matriz de rigidez global, ocupando lugares nesta matriz que correspondem à coincidência entre os deslocamentos elementares e deslocamentos globais. A forma deste “espalhamento” na matriz de rigidez pode ser mais concentrada em certas zonas ou mais dispersa (esparsa), dependendo disso da sequência como foram numerados os deslocamentos nodais globais (e consequentemente os graus de liberdade globais). Em última análise dependem da sequência de numeração dos nós da estrutura porque os deslocamentos nodais se numeram primeiro num determinado nó (serão 3 por cada nó numa estrutura plana) e depois no nó seguinte (mais 3) e assim sucessivamente.

Apresentam-se dois exemplos (figuras 4.3 e 4.4) do espalhamento das matrizes elementares pela matriz global, de uma mesma estrutura, na qual os nós, e por consequência os deslocamentos nodais ( $d^*_i$ ) foram numerados por ordem diferente.

Neste exemplo todas as barras são do tipo rotulado-rotulado às quais se associam quatro graus de liberdade como mostra a figura 4.2 Consequentemente a matriz de rigidez elementar é uma matriz de dimensão  $4 \times 4$ .

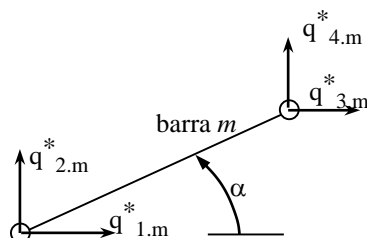


Figura 4.2 - Graus de liberdade da barra bi-rotulada de ordem  $m$  em coordenadas globais

Para o caso 1 faz-se a representação gráfica do espalhamento das rigidezes associadas aos graus de liberdade dos nós da barra 7 pela matriz de rigidez global. Verificamos que os graus de liberdade  $q_{1,7}, q_{2,7}, q_{3,7}$  e  $q_{4,7}$  da barra 7 (ver figura 4.2) se relacionam respectivamente com os graus de liberdade globais  $d^*_5, d^*_6, d^*_9$ , e  $d^*_{10}$ . Assim as rigidezes elementares  $k^*_{ij}$ , com  $i$  e  $j$  a variar de 1 a 4, se espalham na matriz de rigidez global ocupando as posições  $k^*_{rs}$ , com  $r$  e  $s$  a terem ordenadamente os valores 5, 6, 9 e 10. (Repare que o ângulo  $\alpha$  da barra 7 é negativo).

Como se pode observar o espalhamento é disperso no primeiro caso sendo concentrado numa faixa em redor da diagonal principal no segundo caso. A largura máxima desta faixa designa-se por *banda* e pode ser definida como a máxima distância entre elementos não nulos medidos segundo uma linha ou uma coluna. É garantido que valores situados fora da banda são nulos porque

são coeficientes que não tem qualquer correspondência com qualquer deslocamento. Não há por conseguinte que guardar em memória os valores (nulos) fora da banda.

**Caso 1:**

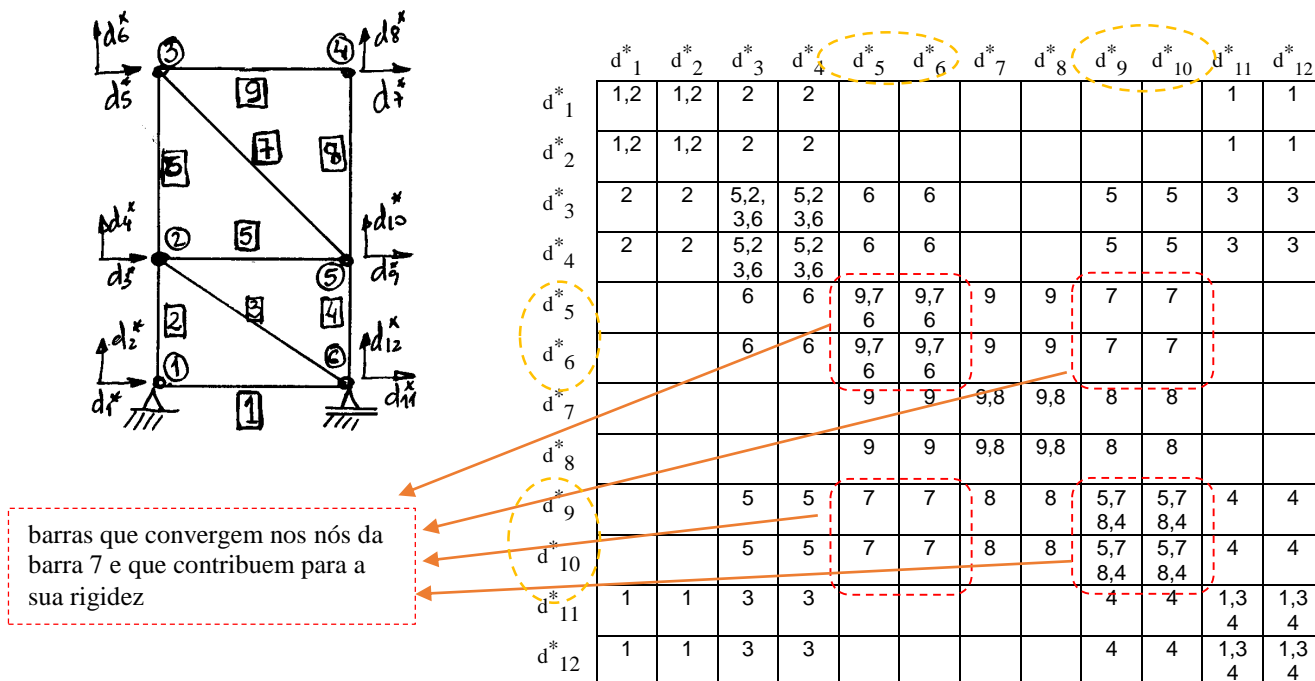


Figura 4.3 - Matriz de rigidez esparsa. Espalhamento da barra 7 na matriz de rigidez global.

**Caso 2:**

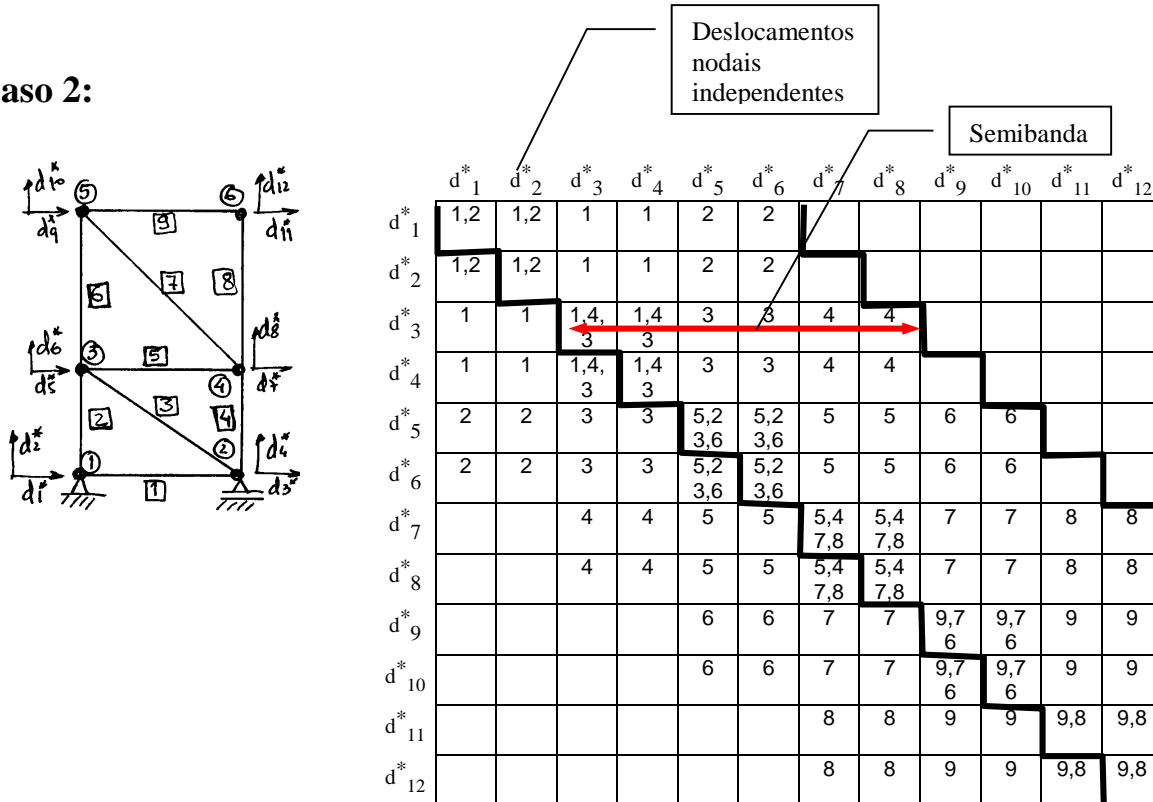


Figura 4.4 - Matriz de rigidez em banda



Por outro lado como a matriz de rigidez é simétrica apenas precisamos de conhecer os valores da diagonal principal e os que lhe ficam acima ou baixo até ao limite da banda. Esta largura chama-se semibanda. O seu valor é dado por:

$$\text{Semibanda} = \text{GLN} \times (\text{dif} + 1) \tag{4.17}$$

sendo GLN- o número de graus de liberdade máximo por cada nó  
 dif – máxima diferença entre nós de um elemento na estrutura.

Nos exemplos temos:

- Caso 1: GLN=2, dif = 6 - 1 = 5, lido na barra 1. → Semibanda = 12. Curiosamente a semibanda é igual à dimensão da matriz de rigidez global. Há que guardar em memória toda a matriz, 144 números, a qual tem muitas zonas dispersas com zeros.

- Caso 2: GLN=2, dif = 5 - 3 = 2 , lido na barra 6. → Semibanda = 6. Só ocuparemos 6 posições na matriz de rigidez global centradas na diagonal principal (72 números).

Matriz bandada correspondente ao caso 2

d* <sub>1</sub>	1,2	1,2	1	1	2	2
d* <sub>2</sub>	1,2	1	1	2	2	
d* <sub>3</sub>	1,4, 3	1,4 3	3	3	4	4
d* <sub>4</sub>	1,4 3	3	3	4	4	
d* <sub>5</sub>	5,2 3,6	5,2 3,6	5	5	6	6
d* <sub>6</sub>	5,2 3,6	5	5	6	6	
d* <sub>7</sub>	5,4 7,8	5,4 7,8	7	7	8	8
d* <sub>8</sub>	5,4 7,8	7	7	8	8	
d* <sub>9</sub>	9,7 6	9,7 6	9	9		
d* <sub>10</sub>	9,7 6	9	9			
d* <sub>11</sub>	9,8	9,8				
d* <sub>12</sub>	9,8					

Figura 4.5 - Matriz de rigidez bandada

As matrizes quadradas que apresentem uma semibanda pequena contêm no canto superior direito e inferior esquerdo zonas de zeros. Sendo a matriz simétrica basta-nos guardar em memória os valores desde a diagonal principal até ao limite da semibanda. A matriz de rigidez que é originalmente quadrada converte-se numa matriz rectangular designada por matriz bandada (ou

bandeada), cujo número de linhas é igual ao número de graus de liberdade da estrutura livre e o número de colunas igual à semibanda. Esta matriz tem no seu canto inferior direito um pequeno triângulo de zeros (cujo número é  $nsb \times (nsb-1) / 2$  sendo  $nsb$  a semibanda). Este novo tipo de armazenamento poupa em geral uma quantidade enorme de memória.

Entretanto desenvolveram-se subrotinas para o cálculo de sistemas de equações que contêm matrizes bandadas, as quais efectuam um número menor de operações aritméticas das matrizes quadradas, reduzindo o erro e o tempo de cálculo.

Há ainda outros processos de armazenamento da matriz de rigidez mais eficazes, sobretudo em termos de poupança de memória, como o armazenamento da matriz num "super vector" chamado "sky line". Os elementos guardados vão, coluna a coluna, desde a diagonal principal até ao último elemento não nulo da coluna. Há necessidade de criar outro vector, o vector "pointer", para permitir a registar o número de ordem do último elemento não nulo de cada coluna. É o processo melhor pois o número de zeros depende menos da forma como se numeram os nós (ou identicamente, os graus de liberdade) da estrutura. As rotinas de cálculo do sistema de equações, são mais complexas porque necessitam de actualização dos índices na procura de cada elemento  $kij$ , onde se perde um pouco mais de tempo. Por outro lado executam menos operações algébricas sobre os elementos da matriz, o que é vantajoso sob o ponto de vista de erros numéricos, e processo de armazenamento em vectores é de consulta mais rápida pelo software, do que se fosse em matriz.

Em conclusão podemos adiantar que uma grande parte do "software" de estruturas incorpora subrotinas de resolução de sistemas de equações de matrizes bandadas. Por isso é conveniente numerar adequadamente os nós da estrutura de forma a fazer reduzir ao máximo a dimensão da semibanda. Há, contudo, certo "software" que numera automaticamente os nós, o que obviamente dispensa esta preocupação por parte do utilizador.

Acrescenta-se finalmente que a numeração dos elementos (barras) é arbitrária. Tem apenas a ver com a saída dos resultados. Por isso se deve numerar por ordem sequencial os elementos de modo a se obter uma saída de resultados sequencial, e por isso de fácil apreensão lógica. Por exemplo, na estrutura articulada apresentada seria preferível numerar primeiro os pilares, depois as vigas e finalmente as escoras (barras diagonais).

#### 4.2.2 - Método da penalização.

Verificámos no Passo 6 que para estabelecer as condições de fronteira era necessário subdividir o sistema de equações em dois sub-sistemas, um associado aos graus de liberdade livres e os restantes aos graus de liberdade restringidos. Podemos entretanto adoptar um método alternativo,

o método da penalização. Este método consiste em aumentar artificialmente o elemento da diagonal principal da matriz de rigidez ( $k_{rr}$ ) associado ao grau de liberdade restringido pelo apoio, com um valor de rigidez muito elevado, por exemplo  $10^{10}$ , "penalizando-o". Esse valor deverá ser muito grande quando comparado com o elemento de maior rigidez da matriz.

A equação de equilíbrio do método dos deslocamentos associada aquele deslocamento nodal impedido,  $d_r^*$ , escreve-se  $\sum k_{rj}^* x d_j^* = F_r^*$ . Explicitando a equação em ordem a  $d_r^*$  obtemos:

$$d_r^* = \frac{F_r^* - \sum_{j=1, (mas\ j \neq r)}^{G_{Lt}} k_{rj}^* x d_j^*}{k_{rr}^*} . \quad (4.18)$$

Ora sendo  $k_{rr}^* \gg \gg k_{rj}^*$  e  $k_{rr}^* \gg \gg F_r^*$  verificamos que resulta  $d_r^* \approx 0$  que não é mais do que a condição de restrição de apoio. O sistema de equações pode então ser resolvido directamente sem ser necessário alterar a ordem das linhas e colunas como exigia antes o Passo 6. Os elementos do vector de deslocamentos final  $\{d^*\}$  associados a graus de liberdade impedidos serão aproximadamente zero,  $\{d_R^*\} \approx \{0\}$ , e os restantes elementos daquele vector  $\{d^*\}$  representarão os deslocamentos reais dos nós livres da estrutura  $\{d_L^*\}$ . Este método conduz a resultados aproximados mas perfeitamente aceitáveis em pequenas estruturas.

O método da penalização engloba os seguintes passos:

(i) Somar à diagonal principal associada ao grau de liberdade restringido um número muito grande;

(ii) Resolver o sistema de equações completo (equivale ao Passo 8) do qual se obtém o vector total  $\{d^*\}$ , que engloba os sub-vectores  $\{d_L^*\}$  e  $\{d_R^*\}$ .

**Exemplo 4.2:**

Pretende-se resolver a equação de equilíbrio do método dos deslocamentos pelo método da penalização sabendo que os seguintes deslocamentos são nulos:  $d^*_1 = d^*_2 = d^*_3 = d^*_9 = 0$ . A equação de equilíbrio é a seguinte:  $[k^*]x\{d^*\} = \{F^*\}$

$$\begin{pmatrix} 0.297 & 0 & 0.089 & 0.148 & 0 & -0.089 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.392 & 0 & 0 & -1.392 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.089 & 0 & 0.036 & 0.089 & 0 & -0.036 & 0 & 0 & 0 \\ 0.148 & 0 & 0.089 & 0.668 & -0.07 & 0.032 & 0.186 & 0.0696 & -0.121 \\ 0 & -1.392 & 0 & -0.07 & 2.7144 & 0.723 & -0.07 & -1.322 & -0.723 \\ -0.089 & 0 & -0.036 & 0.032 & 0.7233 & 0.523 & 0.121 & -0.723 & -0.487 \\ 0 & 0 & 0 & 0.186 & -0.07 & 0.121 & 0.371 & 0.0696 & -0.121 \\ 0 & 0 & 0 & 0.07 & -1.322 & -0.723 & 0.07 & 1.3224 & 0.723 \\ 0 & 0 & 0 & -0.121 & -0.723 & -0.487 & -0.121 & 0.7233 & 0.487 \end{pmatrix} \times 10^6 \begin{Bmatrix} d^*1 \\ d^*2 \\ d^*3 \\ d^*4 \\ d^*5 \\ d^*6 \\ d^*7 \\ d^*8 \\ d^*9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25 \\ 0 \\ -30 \\ 5 \\ 10 \\ -67.32 \\ 20 \\ -20 \\ -17.32 \end{Bmatrix}$$

Como os graus de liberdade respeitantes a deslocamentos impedidos são o 1º, 2º, 3º e 9º, anulam-se as colunas e linhas da matriz de rigidez associadas a estes graus de liberdade e soma-se ao elemento da diagonal principal por um número muito grande, por exemplo  $10^{10}$ . Os elementos do vector de forças associados a estes graus de liberdade serão durante o processo de cálculo serão divididos por aquele número pelo que se tornarão praticamente nulos. Nesta fase podemos mantê-los com o seu valor mas seria melhor anulá-los.

A igualdade anterior ficará com o seguinte aspecto:

$$\begin{pmatrix} 10^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.668 & -0.07 & 0.032 & 0.186 & 0.0696 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.07 & 2.7144 & 0.723 & -0.07 & -1.322 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.032 & 0.7233 & 0.523 & 0.121 & -0.723 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.186 & -0.07 & 0.121 & 0.371 & 0.0696 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.07 & -1.322 & -0.723 & 0.07 & 1.3224 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{10} \end{pmatrix} \times 10^6 \begin{Bmatrix} d^*1 \\ d^*2 \\ d^*3 \\ d^*4 \\ d^*5 \\ d^*6 \\ d^*7 \\ d^*8 \\ d^*9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \\ -67.32 \\ 20 \\ -20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo em ordem a  $\{d^*\}$ :

$$\begin{Bmatrix} d^*1 \\ d^*2 \\ d^*3 \\ d^*4 \\ d^*5 \\ d^*6 \\ d^*7 \\ d^*8 \\ d^*9 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.747 & 0.000 & 0.264 & -0.982 & 0.104 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0.718 & -0.003 & 0.001 & 0.716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.261 & -0.009 & 17.062 & -7.528 & 9.702 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.980 & 0.004 & -7.519 & 6.469 & -4.396 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.102 & 0.713 & 9.710 & -4.405 & 7.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-10} \end{pmatrix} \times 10^{-6} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \\ -67.32 \\ 20 \\ -20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} d^*1 \\ d^*2 \\ d^*3 \\ d^*4 \\ d^*5 \\ d^*6 \\ d^*7 \\ d^*8 \\ d^*9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -30.8 \\ -6.9 \\ -1492.0 \\ 718.7 \\ -874.2 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \times 10^{-6}$$

#### 4.2.3 - Método da eliminação.

Como o método anterior envolve operações com números muito grandes e muito pequenos induz um certo erro de origem numérica devido às truncaturas e ou arredondamentos do processador matemático. O procedimento a seguir permite minorar estes erros porque elimina artificialmente do sistema global de equações aquelas associadas aos graus de liberdade restringidos. Chamemos a este método o "método da eliminação" o qual engloba os seguintes passos:

- (i) Substituir por zeros as linhas e colunas da matriz de rigidez cujo número de ordem é igual ao número de ordem do deslocamento nodal restringido pelo nó de apoio;
- (ii) Colocar na diagonal principal associada ao grau de liberdade restringido um valor unitário;
- (iii) Substituir por zeros o elemento do vector de forças (termo independente) associado ao número de ordem do grau de liberdade restringido pelo nó de apoio;
- (iv) Resolver o sistema de equações completo (equivale ao Passo 8) do qual se obtém o vector total  $\{d^*\}$ , que incorpora elementos dos vectores  $\{d^*_L\}$  e  $\{d^*_R\}$ .

#### 4.2.5 - Assentamentos de apoio. Deformações impostas.

O tratamento dos casos de assentamento de apoio baseia-se no que foi já explicado na secção 3.4.1. A sua implementação contempla os seguintes passos:

- (i) construir um vector  $\{d_s\}$  cujos elementos são os assentamentos segundo cada G.L;
- (ii) alterar o vector de termos independentes  $\{F^*\}$  para  $\{F^{*'}\}$ , fazendo  $\{F^{*'}\} = \{F^*\} - [k^*]\{d_s\}$
- (iv) impor as condições de fronteira ao sistema de equações fazendo  $[k^*]x\{d^*\} = \{F^{*'}\}$ . Para tal poderá optar ou (a) pelo método da penalização, onde para além do especificado em 4.2.2 substituirá o termo  $F'_i$  por  $d_{si} \cdot 10^{10}$ , ou (b) pelo método da eliminação, onde para além do especificado em 4.2.3 substituirá o termo  $F'_i$  por  $d_{si}$ . A ordem  $i$  corresponde ao assentamento associado ao G.L.  $i$ .

#### 4.2.4 - Cálculo das reacções de apoio.

Após a determinação de  $\{d^*\}$  por qualquer dos métodos descritos em 4.2.2 ou 4.2.3, se multiplicarmos a matriz original  $[K^*]$  por  $\{d^*\}$  obtemos o vector de forças nodais  $\{F^*\}$ . Os elementos deste último estão associados quer a graus de liberdade livres, que compõem o sub-vector  $\{F^*_L\}$ , quer a graus de liberdade restringidos, representados pelo sub-vector  $\{F^*_R\}$ . Mas como  $\{F^*_R\} = \{Q^*_R\} - \{Q^*_{0R}\}$  (expressão 4.12) a reacção de apoio associada ao grau de liberdade  $i$ , pode ser determinada por  $Q^*_{Ri} = F^*_{Ri} + Q^*_{0Ri}$  sendo  $Q^*_{0Ri}$  a força de fixação das acções de vão associadas aquele grau de liberdade.

## 5. - Grelhas

### 5.1 - Definição e Objectivos.

Grelhas são estruturas constituídas por associação de barras cujos eixos estão contidos num plano, em relação ao qual os vectores de forças aplicadas lhe são perpendiculares e os vectores de momento nele estão contidos. Os pavimentos horizontais vigados, cujas vigas se intersectam entre si e sem apoios nesses nós, cabem na definição anterior, visto as cargas a que estão sujeitos, essencialmente gravíticas, serem perpendiculares ao plano da estrutura. Existirão pilares ou paredes que darão apoio em alguns dos nós na grelha.

Se porventura esta estrutura fosse oblíqua em relação à horizontal, tratava-se uma estrutura plana com carregamento espacial. Deveria ser resolvida por um elemento de barra tridimensional, que será essencialmente um elemento misto de pórtico (2D) e elemento de grelha. Em alternativa e academicamente, a estrutura poderia ser resolvida como a sobreposição de duas sub-estruturas: a primeira seria uma grelha sobre a qual actuariam as componentes de força perpendiculares ao plano e a segunda seria um pórtico plano sobre o qual actuariam as componentes de força contidas no plano estrutural. Hoje em dia com a vulgarização de software que já trata directamente estruturas tridimensionais facilmente se resolveria o problema.

O que importa aqui é entender a base de funcionamento de uma estrutura em grelha, essencial para compreender estruturas mais complexas.

### 5.2 - Esforços relevantes numa grelha

Imaginemos a grelha plana num referencial tridimensional como mostra a figura 5.1-a). Todas as forças aplicadas se podem decompor segundo as componentes do referencial global, constituindo o vector de forças no espaço  $\{F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z\}^T$ . Por outro lado, em qualquer secção da barra orientada segundo o eixo  $x$  do referencial local, estão instalados os seguintes esforços internos  $\{N, V_y, V_z, T, M_y, M_z\}^T$  indicados na figura 5.1-b). Qualquer nó poderá ter os deslocamentos nodais independentes no espaço  $\{\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T$  como na figura 5.1-c).

Para que as acções actuantes, reacções e esforços internos estejam em equilíbrio é necessário que se satisfaçam as seis equações de equilíbrio da estática no espaço:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_x = 0 \qquad (5.1-a,b)$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad (5.1-c,d)$$

$$\Sigma F_z = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \qquad (5.1-e,f)$$

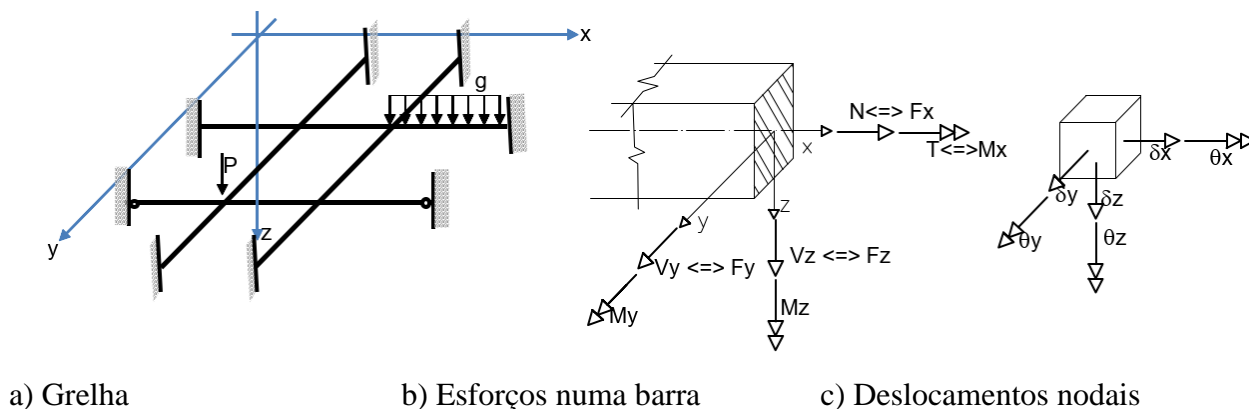


Figura 5.1

Como sobre a grelha, e por hipótese/definição actuam apenas acções perpendiculares ao seu plano e ou momentos contidos no seu plano, nunca haverá forças segundo x e y e momentos em torno de z . Consequentemente as barras nunca terão esforços axiais <sup>(\*)</sup> nem momentos de flexão em torno de z . Só têm relevância os esforços transversos segundo z,  $V_z$ , e o momento cujo vector está contido no plano da estrutura. A componente do momento segundo o eixo da peça designa-se por momento torsor, T, enquanto a componente perpendicular ao eixo da peça é o momento flector  $M_f$ . Quer T como  $M_f$  podem ser decompostos das direcções dos eixos x e y do referencial global, de que resultam os momentos vectoriais  $M_x$  e  $M_y$ , como mostra a figura 5.2.

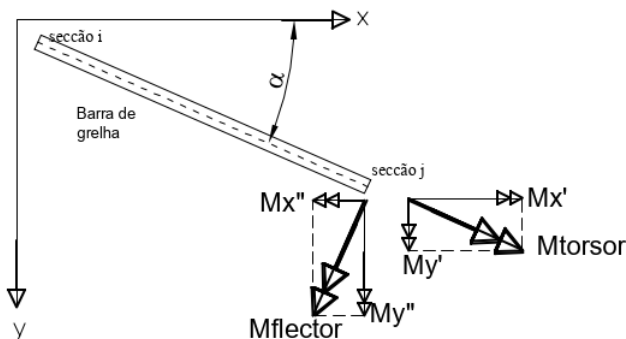


Figura 5.2

Conclui-se assim os esforços relevantes numa barra de grelha são o esforço transversal  $V_z$ , o momento flector M, e o momento torsor T, os quais deverão permanecer em equilíbrio satisfazendo apenas as equações  $\Sigma F_z = 0$ ,  $\Sigma M_x = 0$  e  $\Sigma M_y = 0$  .

<sup>(\*)</sup> Nos casos particulares das vigas das grelhas localizadas em caves de edifícios, poderão ficar sujeitas a esforços axiais não desprezáveis, quando a própria estrutura da laje (grelha) funcionar como apoio para os muros de suporte de contenção de terras.



### 5.3- Deslocamentos nodais independentes

Dos seis deslocamentos nodais independentes de um nó no espaço, apenas três estão associados às equações de equilíbrio (5.1-b, d e e) em jogo na grelha, e são o deslocamento vertical  $\delta_z$ , rotação em torno de x,  $\theta_x$  e rotação em torno de y,  $\theta_y$  (figura 5.3-b)). Os seis deslocamentos nodais independentes da *barra do tipo grelha* exibem-se na figura 5.3-a).

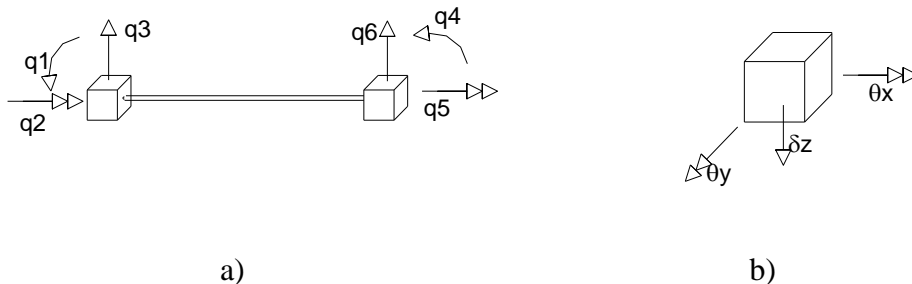


Figura 5.3

Para o cálculo do grau de indeterminação cinemático da estrutura ( $\beta$ ) assim como para a determinação de esforços usam-se as mesmas técnicas e métodos já conhecidos para a resolução de pórticos planos. Apenas se terá que fazer uma 'reconversão' coerente com o significado recente de cada deslocamento e esforço.

### 5.4 - Elemento base de grelha

Os elementos base de grelha são muito semelhantes aos elementos de base de pórticos porque os modos de deformação associados à rotação ou translação transversal de qualquer dos nós são os mesmos para estes dois tipos de elementos estruturais. A única diferença consiste na substituição do modo associado à deformação axial nas barras dos pórticos, pelo modo de deformação associado à torção nas barras do elemento grelha. A figura 5.4 mostra três modos de deformação independentes do nó esquerdo, do elemento barra de grelha encastrado-encastrado.

a) 1º modo:  $\delta_z = 1 \Leftrightarrow q_1 = 1$ , b) 2º modo:  $\theta_y = 1 \Leftrightarrow q_2 = 1$ , c) 3º modo:  $\theta_z = 1 \Leftrightarrow q_3 = 1$

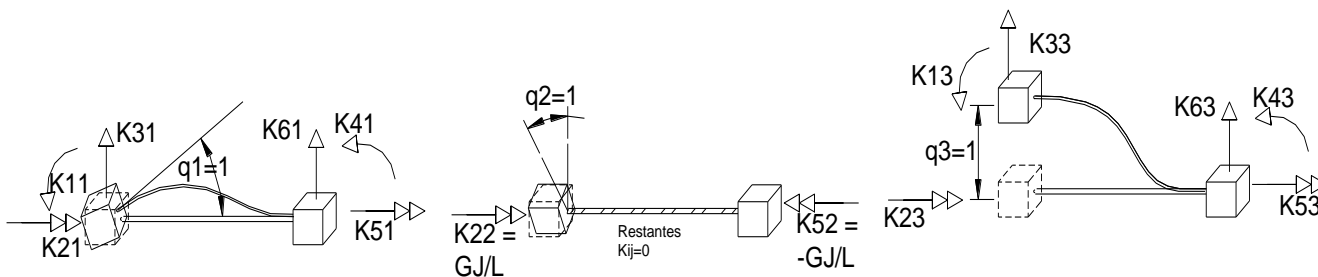


Figura 5.4

É de referir que o coeficiente de rigidez  $k_{22} = GJ/L$  depende do factor de rigidez da secção à torção,  $J$ . A tabela da figura 5.5 indica factores de rigidez de diversas secções, incluindo a secção rectangular para a qual este factor é função da sua esbelteza  $h/b$  da secção.




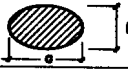



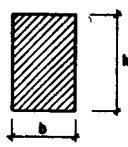
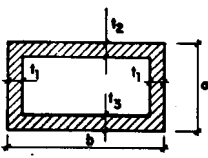
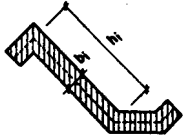
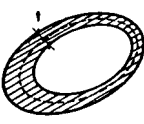
As notas do artigo 49º do REBAP chamam à atenção para que, na determinação de esforços em estruturas com barras sujeitas a esforços de torção de natureza hiperestática (torção de compatibilidade), pode ser necessário atender à sensível redução de rigidez de torção devido à fendilhação do betão. O CEB refere por seu lado, que mesmo em fase não fendilhada, para atender à não linearidade do comportamento do betão, que se considere uma rigidez de torção de apenas cerca de 70% da rigidez elástica inicial e que este valor se reduza a cerca de 25%, no caso de existir forte fendilhação devida à flexão, e mesmo a cerca de 10%, quando haja fendilhação intensa devida a torção ou a esforço transversal.

Na sequência do parágrafo anterior convém aqui distinguir dois tipos de torção: a torção de equilíbrio e a torção de compatibilidade.

A torção de equilíbrio quando o esforço de torção for imprescindível para se garantir o equilíbrio da estrutura ou subestrutura. É o que se passa com a viga ABC da figura 5.6.a) que cujos esforços de torção são necessários para garantir a estabilidade da consola BD. Se ABC "não resistir" à torção é impossível equilibrar a consola. O factor de rigidez à torção  $J$  deverá ser o seu valor elástico.

Por oposição à torção de equilíbrio, designa-se por torção de compatibilidade a que actua nas barras como resultado da ligação entre elas num nó. Por exemplo no cruzamento de vigas perpendiculares em cruz, as rotações associadas a momentos flectores das vigas numa dada direcção é equilibrada por rotações em torno do eixo longitudinal (associadas a momentos torsores) das vigas que lhe são perpendiculares, e vice-versa. Neste caso mesmo que as barras tenham menor capacidade de resistir a esforços de torção, inicialmente previsto no cálculo, todo o valor excedente da sua capacidade será transferido para as barras vizinhas como momento flector acrescido, e será então necessário que a resistência à flexão suporte o acréscimo de momento flector. Se assim for haverá equilíbrio da estrutura, mas à custa do acréscimo de flexão nestas barras, e de deformação por torção nas barras perpendiculares. Assim se a barra AB da estrutura da figura 5.6-b) fosse solicitada à torção para além da sua capacidade resistente, a parcela de momento tissor excedente não equilibrada por torção seria transferida para a barra BC como momento flector adicional. O nó C apresentará uma flecha maior, porque o decréscimo de rigidez de torção da estrutura se traduz por um aumento de flexibilidade global da estrutura. Como as peças de betão armado se comportam mal à torção, muitas vezes no dimensionamento reduz-se

propositadamente a sua rigidez elástica de torção. Desta forma os esforços de torção virão menores que os correspondentes à rigidez elástica de torção, sendo mais fácil também, armar a peça. Porém os esforços de flexão virão maiores. Há que controlar este balanço rigidez de torção-rigidez de flexão, pois se se exagerar na diminuição artificial da rigidez de torção, a peça apresentará deformação por torção elevada, exibindo fissuração inconveniente o que poderá não satisfazer os estados limites de utilização, ou apresentar uma deterioração tal do betão que o incapacita para suportar esforços de flexão.

Forma y dimensiones de la sección	J	W <sub>t</sub>	Observaciones																														
Círculo 	$\pi \frac{a^4}{32}$	$\pi \frac{a^3}{16}$																															
Anillo circular 	$\frac{\pi}{32} (a^4 - a_1^4)$	$\frac{\pi}{16} \frac{a^4 - a_1^4}{a}$																															
Anillo circular de pared delgada 	$\frac{\pi}{4} a^3 t$	$\frac{\pi}{2} a^2 t$																															
Elipse 	$\frac{\pi}{16} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	$\frac{\pi}{16} a b^2$	Para secciones irregulares se recomienda sustituirlas por la elipse inscrita 																														
Exágono regular 	$0.135 a^4$	$0.188 a^3$																															
Octógono regular 	$0.130 a^4$	$0.185 a^3$																															
Rectángulo  b < h	$a b^3 h$	$\beta b^2 h$																															
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>h/b</th> <th>1.00</th> <th>1.25</th> <th>1.50</th> <th>2.00</th> <th>3.00</th> <th>4.00</th> <th>6.00</th> <th>10.00</th> <th>∞</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>α</td> <td>0.140</td> <td>0.171</td> <td>0.196</td> <td>0.229</td> <td>0.263</td> <td>0.281</td> <td>0.299</td> <td>0.313</td> <td>0.333</td> </tr> <tr> <td>β</td> <td>0.208</td> <td>0.221</td> <td>0.231</td> <td>0.246</td> <td>0.267</td> <td>0.282</td> <td>0.299</td> <td>0.313</td> <td>0.333</td> </tr> </tbody> </table>	h/b	1.00	1.25	1.50	2.00	3.00	4.00	6.00	10.00	∞	α	0.140	0.171	0.196	0.229	0.263	0.281	0.299	0.313	0.333	β	0.208	0.221	0.231	0.246	0.267	0.282	0.299	0.313	0.333		
h/b	1.00	1.25	1.50	2.00	3.00	4.00	6.00	10.00	∞																								
α	0.140	0.171	0.196	0.229	0.263	0.281	0.299	0.313	0.333																								
β	0.208	0.221	0.231	0.246	0.267	0.282	0.299	0.313	0.333																								
Sección cajón  t <sub>1</sub> << b t <sub>2</sub> , t <sub>3</sub> << a	$\frac{4 ba}{\frac{2}{bt_1} + \frac{1}{at_2} + \frac{1}{at_3}}$	2 bat <sub>min</sub> .																															
Sección abierta descomponible en rectángulos 	$\sim \frac{1}{3} \sum b_i^3 h_i$		Para repartir el momento torsor T entre los diversos rectángulos puede suponerse que todos giran el mismo ángulo. Entonces: $T_i = T \frac{C_i}{\sum C_i}$ Siendo C <sub>i</sub> el momento de inercia a torsión del rectángulo i																														
Sección hueca de pared delgada  A <sub>0</sub> = área sec. media p = perímetro sec. media	$\frac{4 A_0^2}{\oint \frac{ds}{t}}$ para t = cte. $\frac{4 A_0^2 t}{p}$	2 A <sub>0</sub> t <sub>min</sub> .																															

$$\phi = \frac{TL}{GJ}; \tau_{\text{máx}} = \frac{T}{W_t}$$

Figura 5.5 - Factores de rigidez à torção [adoptado de [11]]

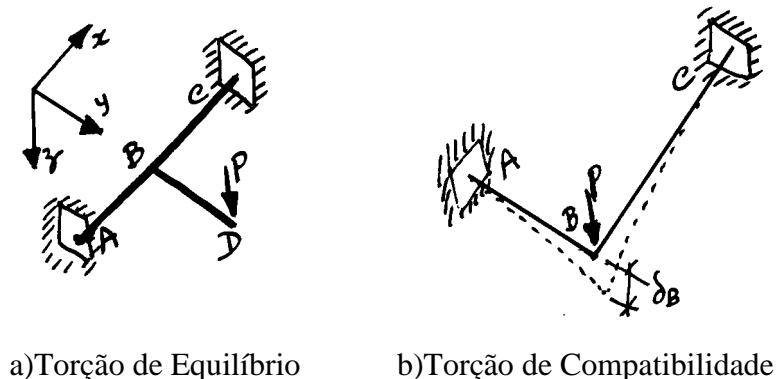


Figura 5.6

5.5 - Matriz de rigidez do elemento grelha encastrado-encastrado.

A figura 5.7 mostra os 6 deslocamentos nodais independentes de uma barra de grelha do tipo encastrada-encastrada, e as forças nodais independentes e a equação (5.3) a matriz de rigidez em coordenadas locais. A matriz de transformação de coordenadas é apresentada na equação (5.4-5).

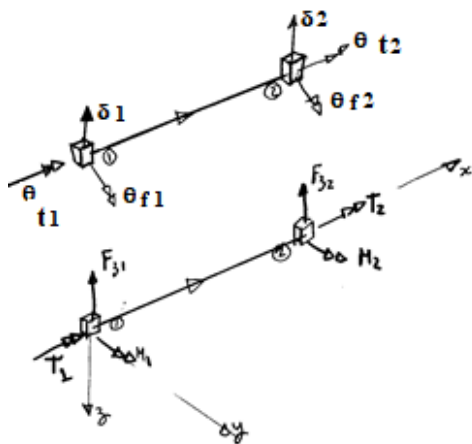


Figura 5.7

$$\{q\}_m = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{f1} \\ \theta_{t1} \\ \delta_1 \\ \theta_{f2} \\ \theta_{t2} \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad \{Q\}_m = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ T_1 \\ F_{z1} \\ M_2 \\ T_2 \\ F_{z2} \end{Bmatrix}$$

Deslocamentos nodais independentes                      Forças Nodais independentes

Matriz de Rigidez de um elemento de grelha encastrado-encastrado de acordo com os graus de liberdade. Compare com a matriz da equação (2.8) e justifique as diferenças.

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} \\ \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Matriz de rigidez em coordenadas locais de um elemento de grelha deformável por flexão, torção e esforço transverso:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \phi_1 \beta_1 & 0 & \frac{2EI}{L} \phi_1 \gamma_1 & -\frac{12EI}{L^3} \phi_1 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \phi_1 \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} \phi_1 \gamma_1 & 0 & \frac{12EI}{L^3} \phi_1 & \frac{6EI}{L^2} \phi_1 & 0 & -\frac{12EI}{L^2} \phi_1 \\ -\frac{12EI}{L^3} \phi_1 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \phi_1 & \frac{4EI}{L^3} \phi_1 \beta_1 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \phi_1 \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \phi_1 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \phi_1 & -\frac{6EI}{L^2} \phi_1 & 0 & \frac{12EI}{L^3} \phi_1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

com  $\phi_1 = \frac{1}{1+2\alpha_1}$ ;  $\alpha_1 = \frac{6EI}{L^2} \frac{1}{GA}$ ;  $\gamma_1 = 1 - \alpha_1$ ;  $\beta_1 = 1 + \frac{\alpha_1}{2}$ ;  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  (5.3-a a e))

A matriz de rigidez em coordenadas globais (figura 5.7) será:  $[k^*] = [T]^T \times [k] \times [T]$

com  $[T] = \begin{bmatrix} [T] & 0 \\ 0 & [T] \end{bmatrix}$  e  $[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . (5.4-5)

5.6 - Representação gráfica de libertação de apoios

Sugerem-se as seguintes representações em planta e alçado das libertações de torção, de momento flector segundo cada um dos eixos principais e rótula geral (figura 5.8).

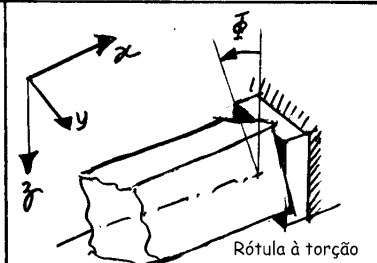
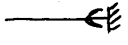
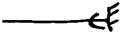
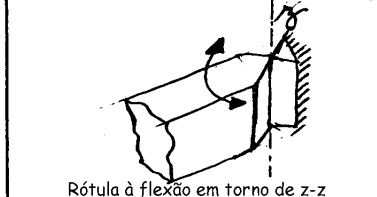
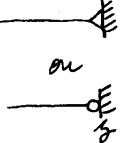
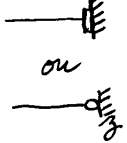
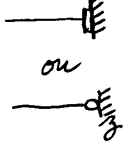

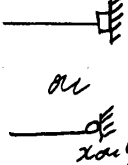
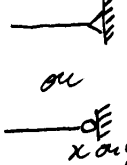
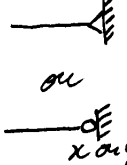
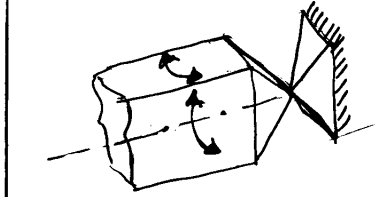
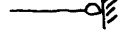

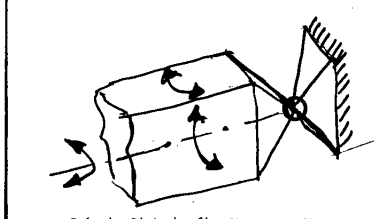
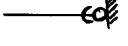
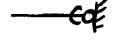
	Planta	Alçado
 <p>Rótula à torção</p>		
 <p>Rótula à flexão em torno de z-z</p>	 <p>ou</p> 	
 <p>Rótula à flexão em torno de y-y ou de x-x</p>	 <p>ou</p> 	
 <p>Rótula à flexão em torno de y-y e de x-x</p>		
 <p>Rótula Global - flexão e torção</p>		

Figura 5.8 - Aparelhos de apoio rotulados

### 6.- Condensação da Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez global de uma estrutura está relacionada com todos os graus de liberdade dos seus nós e descontinuidades e cujo número é, como sabemos, o grau de indeterminação cinemática da estrutura,  $\beta$ . Por vezes interessa-nos quantificar a rigidez da estrutura global associada a apenas alguns dos seus graus de liberdade originais, digamos  $\beta_L$ . Nesse sentido devemos *condensar* a matriz de rigidez global eliminando os  $(\beta - \beta_L)$  graus de liberdade indesejáveis, "mantendo-os" contudo como grandezas dependentes dos primeiros (ou seja, dos  $\beta_L$  graus de liberdade).

Imaginemos então dois subconjuntos dos deslocamentos nodais independentes agrupados no vector  $\{d\}$ . O primeiro é o subconjunto  $\{d_A\}$  dos graus de liberdade iniciais que pretendemos que continuem independentes, e o segundo, o subconjunto  $\{d_B\}$  os graus que se tornarão dependentes. A equação de equilíbrio do método dos deslocamentos  $[K]\{d\} + \{Q_0\} = \{Q\}$  pode então ser escrita como  $[K]\{d\} = \{F\}$  com  $\{F\} = \{Q\} - \{Q_0\}$ , e ainda decomposta na forma:

$$[K]\{d\} = \{F\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix}, \text{ ou seja, } \begin{cases} K_{AA} * d_A + K_{AB} * d_B = F_A \\ K_{BA} * d_A + K_{BB} * d_B = F_B \end{cases} \quad (6.1)$$

Resolvendo a 2ª equação em ordem a  $d_B$  obtemos:

$$\{d_B\} = [K_{BB}]^{-1} * \{F_B\} - [K_{BB}]^{-1} * [K_{BA}] * \{d_A\}, \quad (6.2)$$

que substituído na 1ª equação e simplificando, conduz à nova igualdade:

$$\boxed{[K^*] \{d^*\} = \{F^*\}} \quad (6.3)$$

com 
$$[K^*] = [K_{AA}] - [K_{AB}] * [K_{BB}]^{-1} * [K_{BA}] \quad (6.4)$$

$$\{d^*\} = \{d_A\} \quad (6.5)$$

$$\{F^*\} = \{F_A\} - [K_{AB}] * [K_{BB}]^{-1} * \{F_B\} \quad (6.6)$$

A igualdade (6.3) não é mais do que é a equação do método dos deslocamentos escrita em termos dos novos deslocamentos nodais escolhidos como independentes  $\{d_A\}$ . A matriz  $[K^*]$  é a matriz de rigidez condensada. Entretanto a igualdade (6.2) exprime a dependência dos deslocamentos nodais  $\{d_B\}$  relativamente a  $\{d_A\}$ .

6.1- Equação de sobreposição de efeitos para esforços

Podemos exprimir a equação de sobreposição de efeitos para esforços :

$$\{X\}=[E]\{d\}+\{X_0\} \tag{6.7}$$

em termos dos novos deslocamentos nodais independentes  $\{d_A\}$ . Há então que subdividir a matriz de esforços  $[E]$  em duas submatrizes  $[E_A]$  e  $[E_B]$ , associadas respectivamente aos graus de liberdade  $\{d_A\}$  e  $\{d_B\}$ .

$$\{X\}=[[E_A][E_B]]\{d\} + \{X_0\} \Rightarrow \{X\} = [E_A] \{d_A\} + [E_B]\{d_B\} + \{X_0\} \tag{6.8}$$

Substituindo (6.2) em (6.8) obtemos:

$$\boxed{\{X\} = [E^*]\{d^*\} + \{X_0^*\}} \tag{6.9}$$

com :  $[E^*] = [E_A] - [E_B] [K_{BB}]^{-1} [K_{BA}]$  (6.10)

$$\{X_0^*\} = [E_B] [K_{BB}]^{-1} \{F_B\} + \{X_0\} \tag{6.11}$$

$$\{d^*\}=\{d_A\} \tag{6.5)-rep.}$$

Esta nova forma de determinar os esforços embora contenha algumas matrizes mais pequenas não traz grande vantagem pois apresenta um número grande de operações matriciais. Na verdade a equação (6.7) pode ser sempre usada desde que se construa o vector de deslocamentos  $\{d\}$  nodais completo:

$$\{d\} = \left\{ \begin{matrix} \{d_A\} \\ \{d_B\} \end{matrix} \right\} \tag{6.6}$$

Apresentam-se exemplos cuja resolução obriga à condensação de matrizes.

EXEMPLO 6.1

Um elemento de viga tem comprimento  $L$  e é constituída por 2 troços. O primeiro troço, do nó 1 ao 3, tem comprimento  $L/3$  e rigidez  $EI$ , enquanto o segundo troço, do nó 3 ao nó 2, tem comprimento  $2L/3$  e rigidez  $2EI$ . Construa a matriz de rigidez condensada para os graus de liberdade dos nós de extremidade.

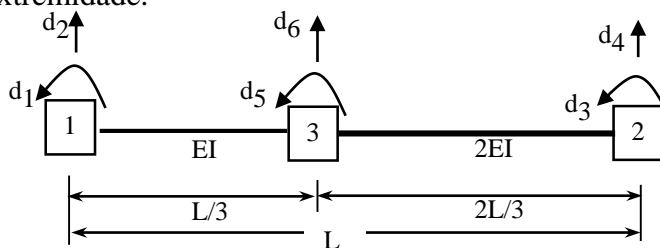


Figura 6.1



Resolução:

Num elemento de viga considera-se sempre que é axialmente indeformável. Por isso cada nó tem dois graus de liberdade (rotação e translação) que estão devidamente numerados na figura. Numeraram-se os deslocamentos nodais deixando para último lugar os futuros deslocamentos nodais dependentes ( $d_5$  e  $d_6$  - a rotação e translação do nó 3). É montada a matriz de rigidez global na qual se distinguem as submatrizes associadas aos futuros graus de liberdade independentes e dependentes:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12}{L} & \frac{54}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6}{L} & \frac{-54}{L^2} \\ \frac{54}{L^2} & \frac{324}{L^3} & 0 & 0 & \frac{54}{L^2} & \frac{-324}{L^3} \\ 0 & 0 & \frac{12}{L} & \frac{-27}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{27}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{27}{L^2} & \frac{81}{L^3} & \frac{-27}{L^2} & \frac{-81}{L^3} \\ \hline \frac{6}{L} & \frac{54}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{-27}{L^2} & \frac{24}{L} & \frac{-27}{L^2} \\ \frac{-54}{L^2} & \frac{-324}{L^3} & \frac{27}{L^2} & \frac{-81}{L^3} & \frac{-27}{L^2} & \frac{405}{L^3} \end{bmatrix} *EI = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix}$$

Procede-se à inversão de  $K_{BB}$  cujo valor é:  $[K_{BB}]^{-1} = \frac{L^4}{8991 * EI} \begin{bmatrix} \frac{405}{L^3} & \frac{27}{L^2} \\ \frac{27}{L^2} & \frac{24}{L} \end{bmatrix}$

A matriz de rigidez condensada obtém-se de  $[K^*] = [K_{AA}] - [K_{AB}] * [K_{BB}]^{-1} * [K_{BA}]$  e vale:

$$[K^*] = \frac{EI}{37} \begin{bmatrix} \frac{168}{L} & \frac{270}{L^2} & \frac{102}{L} & \frac{-270}{L^2} \\ \frac{270}{L^2} & \frac{640}{L^3} & \frac{378}{L^2} & \frac{-648}{L^3} \\ \frac{102}{L} & \frac{378}{L^2} & \frac{276}{L} & \frac{-378}{L^2} \\ \frac{-270}{L^2} & \frac{-648}{L^3} & \frac{-378}{L^2} & \frac{648}{L^3} \end{bmatrix}$$

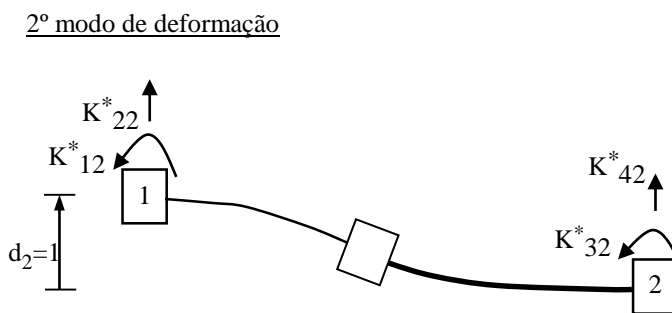


Figura 6.2

A segunda coluna da matriz de rigidez é constituída, como se sabe, pelas forças de fixação  $k^*_{i2}$  quando se impõe o deslocamento nodal independente  $d_2=1$  e se mantêm os restantes

deslocamentos nodais independentes ( $d_1$ ,  $d_3$  e  $d_4$ ) nulos. A figura acima apresenta o esboço do modo de deformação correspondente.

EXEMPLO 6.2

Explicitite a matriz de rigidez da seguinte estrutura em termos dos graus de liberdade associados aos deslocamentos horizontais das vigas. As barras são axialmente indeformáveis.

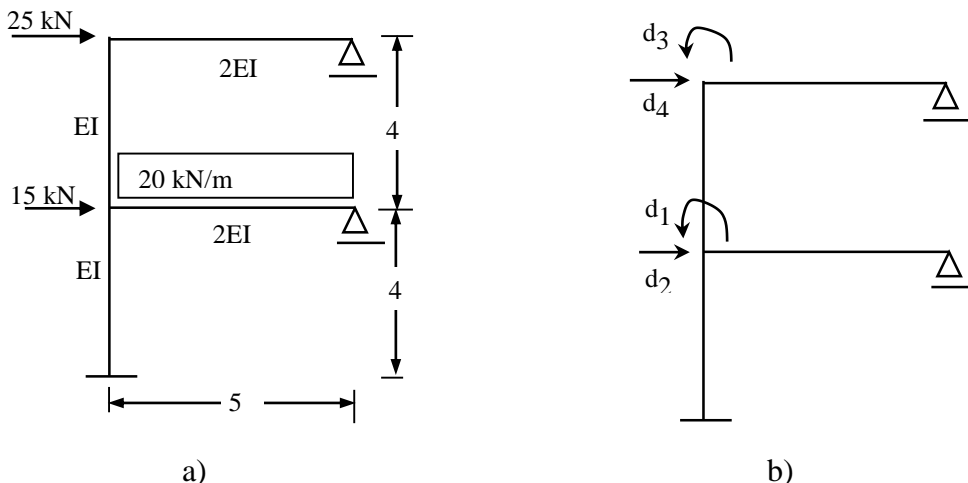


Figura 6.3

São montadas a matriz de rigidez  $[K]$  e os vectores  $\{Q_0\}$  e  $\{Q\}$  associados aos deslocamentos nodais independentes  $d_i$ . A equação de equilíbrio é :

$$[K]\{d\} + \{Q_0\} = \{Q\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3.2 & 0 & 0.5 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & -0.375 & -0.1875 \\ 0.5 & -0.375 & 2.2 & 0.375 \\ 0.375 & -0.1875 & 0.375 & 0.1875 \end{bmatrix} * EI * \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 62.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \\ 25 \end{Bmatrix}$$

Para efeitos da condensação há que reformular as posições dos deslocamentos nodais. Aqueles que permanecerão independentes ( $d_2$  e  $d_4$ ) deverão ocupar os primeiros elementos do vector  $\{d\}$ , e os que futuramente ficarão dependentes ( $d_1$  e  $d_3$ ) as últimas posições. Em correspondência com o sistema de equações este será reordenado de modo a que apareçam sucessivamente as seguintes equações: segunda, quarta, primeira e terceira.

Entretanto coloca-se o vector  $\{Q_0\}$  no segundo termo resultando este em  $\{Q-Q_0\}$ .

Atendendo às alterações mencionadas a expressão anterior ficará com o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} 0.375 & -0.1875 & 0 & -0.375 \\ -0.1875 & 0.1875 & 0.375 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 3.2 & 0.5 \\ -0.375 & 0.375 & 0.5 & 2.2 \end{bmatrix} * EI * \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_4 \\ d_1 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 25 \\ -62.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[K_{BB}]^{-1} = \begin{bmatrix} 3.2 & 0.5 \\ 0.5 & 2.2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3240 & -0.0737 \\ -0.0737 & 0.4713 \end{bmatrix} * \frac{1}{EI}$$

A matriz de rigidez condensada (eq. 6.4) será:

$$[K^*] = [K_{AA}] - [K_{AB}] * [K_{BB}]^{-1} * [K_{BA}] = \begin{bmatrix} 0.30873 & -0.1316 \\ -0.1316 & 0.09637 \end{bmatrix} * EI$$

O vector de forças de fixação (eq. 6.6) ficará:

$$\{F^*\} = \{F_A\} - [K_{AB}] * [K_{BB}]^{-1} * \{F_B\} = \begin{Bmatrix} 16.7268 \\ 30.8671 \end{Bmatrix}$$

Os deslocamentos nodais independentes obtêm-se da eq. 6.3 valendo:

$$\{d^*\} = \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{456.101}{EI} \text{ m} \\ \frac{943.025}{EI} \text{ m} \end{Bmatrix}.$$

Entretanto podemos determinar o valor dos deslocamentos nodais dependentes a partir da equação 6.2 :

$$\{d_B\} = [K_{BB}]^{-1} * \{F_B\} - [K_{BB}]^{-1} * [K_{BA}] * \{d_A\} = \begin{Bmatrix} \frac{-121.384}{EI} \text{ rad} \\ \frac{-55.411}{EI} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Os esforços finais obtêm-se da equação 6.7 desde que previamente se faça a "montagem" inicial do vector  $\{d\}$  (cujos elementos são, ordenados,  $d_1, d_2, d_3$  e  $d_4$ ). Em alternativa também se podia recorrer à equação 6.9.

Apresentam-se os esboços dos quarto modo de deformação da estrutura inicial e segundo modo de deformação da "estrutura" condensada, e que são equivalentes ao mesmo deslocamento horizontal. Repare nas diferenças.

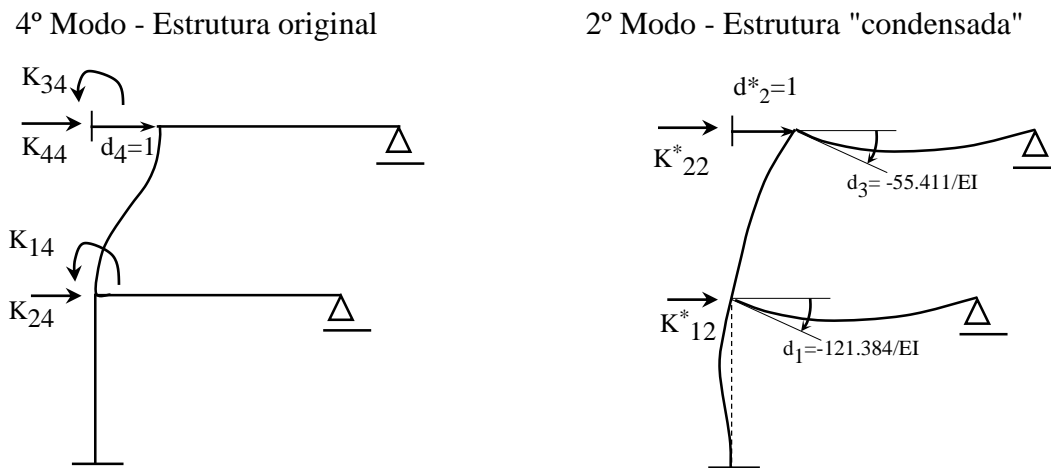


Figura 6.4

6.1.2 - Condensação "manual".

As operações matriciais apresentadas que conduzem à condensação do sistema de equações podem ser realizadas por um algoritmo iterativo, e por isso também designado por manual. O processo consiste em condensar a matriz de rigidez de modo a anular os coeficientes que multiplicam os deslocamentos nodais dependentes (desde a diagonal principal) nas equações associadas aos graus de liberdade independentes.

Começamos novamente por escrever a igualdade  $[K]\{d\} + \{Q_0\} = \{Q\}$  na forma  $[K]\{d\} = \{F\}$  e agrupando as equações associadas aos graus liberdade que se pretendem independentes nas linhas superiores do sistema de equações, e as restantes equações nas linhas inferiores. Este procedimento fora, aliás, já realizado para definir a submatrizes  $[K_{AA}]$ ,  $[K_{AB}]$ ,  $[K_{BB}]$ , e os vectores  $\{F_A\}$  e  $\{F_B\}$ .

De seguida montamos uma matriz de números constituída pela matriz de rigidez  $[K]$ , vector de dos termos independentes  $\{F\}$  e outro vector de controle  $\{v_c\}$ . Os elementos deste último são unitários nas linhas correspondentes às equações independentes e nulos nas linhas das equações dependentes. A matriz referida fica com o seguinte aspecto:

$$[ [K]\{F\}\{v_c\} ] = \left[ \begin{array}{cccc|c|c} 0.375 & -0.1875 & 0 & -0.375 & 15 & 1 \\ -0.1875 & 0.1875 & 0.375 & 0.375 & 25 & 1 \\ 0 & 0.375 & 3.2 & 0.5 & -62.5 & 0 \\ -0.375 & 0.375 & 0.5 & 2.2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vamos começar por condensar a 4ª coluna a partir do elemento  $k_{44}$  de baixo para cima. A nova 3ª linha resulta da soma da 4ª linha com o produto do coeficiente  $k_{44}/k_{34} * -1 = 2.2 / 0.5 * -1$  pela 3ª linha (actual). A nova 2ª linha resulta da soma da 4ª linha com o produto do coeficiente  $k_{44}/k_{24} * -1 = 2.2 / 0.375 * -1$  pela 2ª linha (actual). Finalmente a nova 1ª linha resulta da soma da 4ª linha com o produto do coeficiente  $k_{44}/k_{14} * -1 = 2.2 / -0.375 * -1$  pela 1ª linha (actual). Obtemos a seguinte matriz de números:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 1.825 & -0.725 & 0.5 & 0 & 88 & 5.867 \\ 0.725 & -0.725 & -1.7 & 0 & -146.67 & -5.867 \\ -0.375 & -1.275 & -13.58 & 0 & 275 & 0 \\ -0.375 & 0.375 & 0.5 & 2.2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Repete-se a condensação para a 3ª coluna a partir do elemento  $k_{33}$  de baixo para cima. A nova 2ª linha resulta da soma da 3ª linha com o produto do coeficiente  $k_{33}/k_{23} * -1 = -13.58 / -1.7 * -1$  pela 2ª linha (actual). A nova 1ª linha resulta da soma da 3ª linha com o produto do coeficiente

$k_{33}/k_{13} * -1 = -13.58 / 0.5 * -1$  pela 1ª linha (actual). Obtemos a seguinte matriz de números:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 49.192 & -20.966 & 0 & 0 & 2665.08 & 159.339 \\ -6.167 & 4.516 & 0 & 0 & 1446.61 & 46.864 \\ -0.375 & -1.275 & -13.58 & 0 & 275 & 0 \\ -0.375 & 0.375 & 0.5 & 2.2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Basta agora dividir a 1ª linha pelo 1º coeficiente do vector de controle e a 2ª linha pelo 2º elemento do vector de controle, resultando em:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} 0.309 & -0.1316 & 0 & 0 & 16.726 & 1 \\ -0.1316 & 0.0964 & 0 & 0 & 30.868 & 1 \\ -0.375 & -1.275 & -13.58 & 0 & 275 & 0 \\ -0.375 & 0.375 & 0.5 & 2.2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Como se constata, comparando com o problema anteriormente resolvido, a nova matriz  $[K_{AA}]$  representa agora a matriz condensada  $[K^*]$  e o novo vector  $\{F_A\}$  o vector condensado  $\{F^*\}$ , isto é:

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 0.309 & -0.1316 \\ -0.1316 & 0.0964 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \{F^*\} = \begin{Bmatrix} 16.726 \\ 30.868 \end{Bmatrix}$$

## 6.2- Método da Subestruturação

Este método consiste na divisão da estrutura original em duas (ou mais) subestruturas cujo elo de ligação são os nós comuns, e obviamente os graus de liberdade a eles associados. Este método foi popular quando a capacidade de memória dos computadores era pequena. Pode contudo ainda ser usado, quando estando a trabalhar bidimensionalmente, as estruturas planas se cruzam, partilhando os mesmos nós.

Imagine-se que se pretende subdividir uma estrutura em duas subestruturas A e B. A equação de equilíbrio global é:

$$\begin{bmatrix} [K_{AA}] & [K_{AC}] & [K_{AB}] \\ [K_{CA}] & [K_{CC}] & [K_{CB}] \\ [K_{BA}] & [K_{BC}] & [K_{BB}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_A\} \\ \{d_C\} \\ \{d_B\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_A\} \\ \{F_C\} \\ \{F_B\} \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

sendo:

$[K_{AA}]$ ,  $\{F_A\}$ ,  $\{d_A\}$  - matriz de rigidez, vector de forças e deslocamentos nodais independentes da subestrutura A

$[K_{BB}]$ ,  $\{F_B\}$ ,  $\{d_B\}$  - matriz de rigidez, vector de forças e deslocamentos nodais independentes da subestrutura B

$[K_{CC}]$  - matriz de rigidez associada aos graus de liberdade dos nós comuns às subestruturas A e B. Cada elemento  $K_{cc}$  é a soma da contribuição de rigidez das subestrutura A e B, e que se pode representar por  $[K_{CC}] = [K_{CCA}] + [K_{CCB}]$

$\{F_C\}$  - forças nodais de interligação entre as duas subestruturas. Será decomposta em  $\{F_{CA}\}$  e  $\{F_{CB}\}$ .

$\{d_C\}$  - deslocamentos nodais independentes dos nós comuns às subestruturas A e B.

$[K_{AB}]$  e  $[K_{BA}]$  - submatrizes nulas pois são matrizes cruzadas e que relacionam graus de liberdade não comuns das subestruturas A e B.

Vamos subdividir a igualdade 6.7 em dois sistemas:

$$\begin{bmatrix} [K_{AA}] & [K_{AC}] \\ [K_{CA}] & [K_{CCA}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_A\} \\ \{d_C\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_A\} \\ \{F_{CA}\} \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

$$\begin{bmatrix} [K_{CCB}] & [K_{CB}] \\ [K_{BC}] & [K_{BB}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_C\} \\ \{d_B\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{CB}\} \\ \{F_B\} \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

em que  $\{F_C\} = \{F_{CA}\} = -\{F_{CB}\}$ , pelo princípio da acção e reacção (figura 6.5). (6.10)

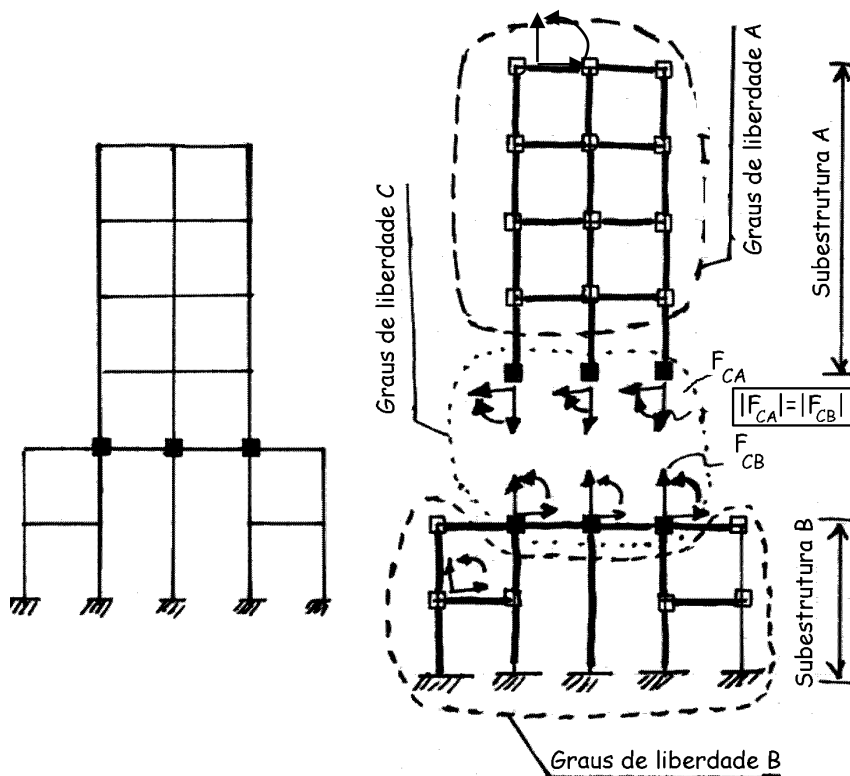


Figura 6.5

Explicitando a 1ª equação da igualdade (6.8) em ordem a  $\{d_A\}$  temos:

$$\boxed{\{d_A\} = [K_{AA}]^{-1} * \{F_A\} - [K_{AA}]^{-1} * [K_{AC}] * \{d_C\}} \tag{6.11}$$

Substituindo  $\{d_A\}$  na 2ª equação de (6.8) e resolvendo em ordem a  $d_C$  vem:

$$[\bar{K}_A] * \{d_C\} = \{\bar{F}_A\} \tag{6.12}$$

com:

$$[\bar{K}_A] = [K_{CCA}] - [K_{CA}] * [K_{AA}]^{-1} * [K_{AC}] \tag{6.13}$$

$$\{\bar{F}_A\} = \{F_{CA}\} - [K_{CA}] * [K_{AA}]^{-1} * \{F_A\} = \{F_C\} - [K_{CA}] * [K_{AA}]^{-1} * \{F_A\} \tag{6.14}$$

porque  $\{F_C\} = \{F_{CA}\}$

Vamos agora proceder de igual forma para (6.9). Assim resolvendo-a em ordem a  $\{d_B\}$  temos:

$$\boxed{\{d_B\} = [K_{BB}]^{-1} * \{F_B\} - [K_{BB}]^{-1} * [K_{BC}] * \{d_C\}} \tag{6.15}$$

que substituindo na primeira equação nos leva a obter:

$$[\bar{K}_B] * \{d_C\} = \{\bar{F}_B\} \tag{6.16}$$

com:

$$[\bar{K}_B] = [K_{CCB}] - [K_{CB}] * [K_{BB}]^{-1} * [K_{BC}] \quad (6.17)$$

$$\{\bar{F}_B\} = \{F_{CB}\} - [K_{CB}] * [K_{BB}]^{-1} * \{F_B\} = \{-F_C\} - [K_{CB}] * [K_{BB}]^{-1} * \{F_B\} \quad (6.18)$$

porque  $\{F_C\} = -\{F_{CB}\}$

Somando (6.12) a (6.16) tendo em conta as igualdades (6.14) e (6.18) obtemos:

$$\boxed{[[K_A] + [K_B]] * \{d_C\} = -[K_{CA}] * [K_{AA}]^{-1} * \{F_A\} - [K_{CB}] * [K_{BB}]^{-1} * \{F_B\}} \quad (6.19)$$

equação matricial que é resolvida em ordem a  $\{d_C\}$ , determinando-se os deslocamentos dos nós comuns às subestruturas. Logo de seguida a partir das expressões (6.12) e (6.14) ou de (6.16) e (6.18) calcula-se o vector de forças de interacção entre as subestruturas  $\{F_C\}$ .

Entretanto como  $\{d_C\}$  já é conhecido podemos determinar as incógnitas cinemáticas  $\{d_A\}$  e  $\{d_B\}$  respectivamente através das igualdades (6.11) e (6.15).



## **ANEXOS A e B**

## A.- Resumo das noções de Trabalho e Energia

Faz-se desde já uma revisão breve das noções de trabalho e energia. Deve o leitor rever estas matérias se necessário noutros textos mais elaborados ou que lhes forem mais familiares. Os tópicos que por agora mais nos interessam apresentam-se o mais resumidamente possível nos parágrafos seguintes.

### A.1- Trabalho

Sempre que se desloca o ponto de aplicação de uma força dizemos que esta produziu *trabalho*.

O trabalho realizado por uma força,  $W$ , é o escalar que resulta do produto interno (ou escalar) da força,  $\{F\}$ , pelo do vector deslocamento do seu ponto de aplicação,  $\{d\}$ , ou seja:

$$W = \{F\} \cdot \{d\} \quad (\text{A.1})$$

Como se sabe o produto interno pode ser escrito como:

$$W = |F| * |d| * \cos \alpha \quad (\text{A.2})$$

sendo  $\alpha$  o ângulo entre as linhas de acção de  $\{F\}$  e  $\{d\}$ . Da definição (A.2) podemos afirmar que o trabalho é o produto do módulo do vector de deslocamento  $|d|$  pelo módulo da projecção da força na direcção do vector deslocamento  $|\text{Proj}_{\vec{d}} \vec{F}|$  (figura A.1.a), ou inversamente, como sendo o produto do módulo da força  $|F|$  pelo módulo da projecção do vector deslocamento na direcção da força  $|\text{Proj}_{\vec{F}} \vec{d}|$  (figura A.1.b).



Figura A.1

Se a força for perpendicular ao vector deslocamento teremos  $\alpha=90^\circ$  e o trabalho realizado pela força será nulo. Se  $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ , ou seja, se a  $\text{Proj}_{\vec{d}} \vec{F}$  e  $\{d\}$  ou a  $\text{Proj}_{\vec{F}} \vec{d}$  e  $\{F\}$  estiverem com sentidos opostos o trabalho é negativo.

A unidade de medida do trabalho é o Joule. Joule define-se como o trabalho realizado pela força constante de 1N quando o seu ponto de aplicação se desloca 1 metro na direcção e sentido da força.

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} * 1 \text{ m.}$$

## A.2 - Energia

*Energia* é tudo aquilo que se pode transformar em trabalho ou resulta de uma transformação de trabalho.

Por exemplo um corpo em movimento pode produzir trabalho porque contém *energia cinética*,  $W_c$ , definida por  $W_c = 1/2 * m * v^2$ , sendo  $m$  a massa do corpo e  $v$  a sua velocidade de deslocação.

Um corpo posicionado a determinada cota altimétrica contém *energia potencial gravítica* ou de *posição*,  $W_p$ , definida por  $W_p = m * g * h$ , sendo  $g$  a aceleração de gravidade no local e  $h$  cota altimétrica em relação a um plano de referência.

Uma mola deformada contém *energia potencial elástica*. O trabalho realizado pela força que provoca a deformação  $\delta$  da mola é  $W_m = \int_0^{\delta} k d\delta$ , sendo  $k$  a rigidez da mola. Este trabalho é armazenado na mola como energia potencial elástica. Logo que se retire a força da mola a energia potencial é responsável pela recuperação da forma inicial da mola.

Um corpo sólido deformável com comportamento elástico comporta-se como se fosse uma mola.

Quando sujeito à acção de uma força deformatar-se-á. O trabalho realizado pela força durante o deslocamento do seu ponto de aplicação será convertido em *energia interna de deformação elástica*,  $U$ , armazenada no próprio corpo. Ao se libertar o corpo da força referida, este retomará a sua forma inicial à custa da energia de deformação elástica entretanto acumulada.

As igualdades entre trabalho e energia só são válidas em sistemas conservativos, ou seja, em sistemas onde não há perda de energia durante as transformações de trabalho em energia e vice-versa. As perdas de energia mais comuns em sistemas mecânicos manifestam-se sob a forma de atrito e calor.

### A.3- Trabalho de Deformação (cap 11.2 Mecânica dos Materiais, Beer,Johnston, ...)

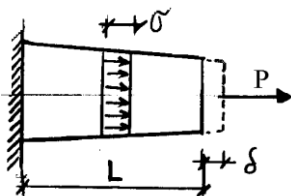


Figura A.2

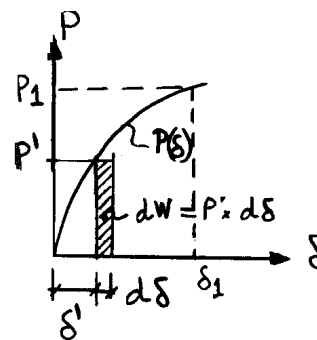


Figura A.3

Suponha uma barra traccionada estaticamente, isto é, sujeita a uma força de tracção lenta e gradualmente crescente de zero até um valor final  $P_1$  e para a qual a barra apresenta uma deformação final  $\delta_1$ . (A aplicação lenta da força é absolutamente necessária pois caso contrário geram-se forças de inércia transformando-se o problema num problema dinâmico.)

Ao traccionarmos a barra admitamos que em determinado instante o esforço axial vale  $P'$  e que a deformação é  $\delta'$ . Se agora impusermos um incremento de deformação  $d\delta$  o trabalho elementar realizado pela força é:  $dw = P' d\delta = P(\delta) d\delta$ , igual à zona sombreada da figura A.3. O trabalho total realizado pela força  $P$  desde a deformação nula até ao instante em que a deformação é  $\delta_1$  é:

$$W = \int dw = \int_0^{\delta_1} P(\delta) d\delta \quad (A.3)$$

A força  $P$  realizou trabalho que é transformado em energia de deformação interna  $U$  acumulada, e como por hipótese não há perdas de energia podemos escrever:

$$\text{Energia de deformação, } U = W = \int_0^{\delta_1} P(\delta) d\delta \quad (A.4)$$

Para barras que apresentem um comportamento elástico linear a tracção  $P(\delta)$  é directamente proporcional ao deslocamento que ela própria provoca,  $P(\delta) = k * \delta$  em que  $k = EA/L$  é a rigidez axial da barra [3]. Substituindo  $P(\delta)$  em (A.4) obtemos:

$$U = \frac{1}{2} P_1 \delta_1 \quad (A.5)$$

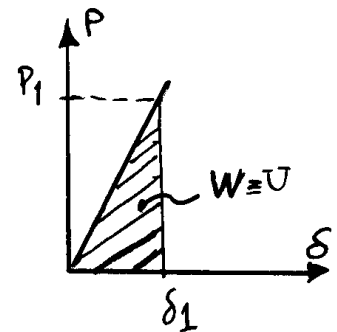
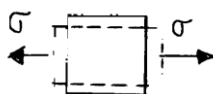


Figura A.4

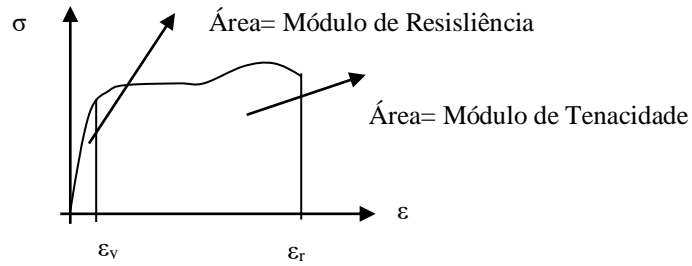
Se dividirmos a energia de deformação de uma barra axialmente solicitada pelo volume da mesma obtemos a *energia de deformação específica* (ou *densidade de energia de deformação*),  $u$ , de um corpo sob tensões uniaxiais. A energia assim definida torna-se independente da geometria da barra ou do corpo.

Energia de Deformação Específica para o Estado Uniaxial de Tensões:

$$u = \frac{U}{V} = \int_0^{\delta} \frac{P}{A * L} d\delta = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad \text{J/m}^3 \leftrightarrow \text{N/m}^2 \quad (A.6.a)$$



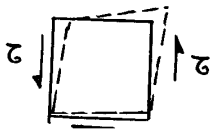
$$u = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad (A.6.b)$$



A energia de deformação específica num ponto de um corpo pode ser entendida como o trabalho acumulado no ponto material sujeito a um estado de tensões uniaxial.

Poderíamos igualmente deduzir a energia de deformação específica para um ponto material sujeito ao corte puro, a partir de uma barra submetida à torção.

Energia de Deformação Específica para o Estado de Corte Puro (no plano xy):



$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy}$$

(A.7)

As definições (A.6.b) e (A.7) da energia de deformação específica, servir-nos-ão para deduzir fórmulas de carácter mais prático relativas à energia de deformação interna em barras, com comportamento elástico linear, sujeitas a casos singulares de carga, nomeadamente ao esforço axial, ao momento flector puro, ao esforço transversal e ao momento torçor. As mesmas expressões serão ainda úteis para a dedução da energia de deformação para o caso mais geral de tensões.

### A.3.1- Energia ou Trabalho de Deformação Elástica para Tensões Normais (Cap 11.4 Mec.Mat))

A energia de deformação elástica para um corpo sujeito ao estado de tensões uniaxial é:

$$U = \int_V u dV = \int_V \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon dV, \quad (A.8)$$

sendo V o volume do corpo.

Se este tiver comportamento elástico linear é válida a Lei de Hooke,  $\sigma = E \epsilon$ , tomando a expressão anterior o seguinte aspecto:

$$U = \int_V \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon dV = \int_V \int_0^\epsilon E\epsilon d\epsilon dV = \frac{1}{2} \int_V E\epsilon^2 dV \quad (A.9.a)$$

ou ainda,

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^2 dV = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^* \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^* \sigma}{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^2}{E} dV \quad (\text{A.9.b})$$

Energia ou Trabalho de deformação elástica de um corpo sujeito a tensões normais:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^2 dV} \quad \text{ou} \quad \boxed{U = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^2}{E} dV} \quad (\text{A.9.a e A.9.b)- rep.}$$

#### A.3.1.1.- Barra Sujeita à Tracção Pura, N

Como sabemos neste caso,  $\sigma = N/A$ . Substituindo em (A.9.b) e desenvolvendo-a obtemos a energia de deformação elástica de barras sujeitas ao esforço axial:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^2}{E} dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{N^2}{EA^2} dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx} \quad (\text{A.10})$$

#### A.3.1.2- Barra Sujeita à Flexão Pura, M.

As tensões normais em flexão valem  $\sigma = -\frac{M}{I} y$ . Substituindo-as em (A.9.b), resulta a energia de deformação de barras à flexão:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^2}{E} dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{M^2}{EI^2} y^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI^2} \left( \int_A y^2 dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx} \quad (\text{A.11})$$

#### A.3.2- Energia ou Trabalho de Deformação Elástica para Tensões Tangenciais

Como já vimos a energia de deformação específica de um ponto material sujeito ao corte puro (no plano xy) é:

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} \quad (\text{A.7)-rep.}$$

Se o corpo tiver comportamento elástico linear é válida a Lei de Hooke para tensões tangenciais,

$$\tau_{xy} = G * \gamma_{xy},$$

e a energia de deformação elástica para um corpo de volume  $V$  no estado de corte puro, passa a definir-se por:

$$U = \int_V u \, dV = \int_V \int_0^{\tau_{xy}} \tau \, d\gamma_{xy} \, dV = \int_V \int_0^{\tau_{xy}} G \, \gamma_{xy} \, d\gamma_{xy} \, dV = \frac{1}{2} \int_V G \, \gamma_{xy}^2 \, dV \quad (\text{A.12.a})$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V G \, \gamma_{xy}^2 \, dV = \frac{1}{2} \int_V \tau_{xy} \, \gamma_{xy} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau_{xy}^2}{G} \, dV \quad (\text{A.12.b})$$

Energia ou Trabalho de deformação elástica de um corpo sujeito a tensões tangenciais:

$$U = \frac{1}{2} \int_V G \, \gamma_{xy}^2 \, dV$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau^2}{G} \, dV$$

(A.12.a e A.12.b)-rep

### A.3.2.1- Barra Sujeita ao Esforço Transverso (ou Corte)

Substituindo  $\tau = \frac{VQ}{It}$  em (A.12.b),

$$U = \frac{1}{2} \int_V \frac{V^2 Q^2}{I^2 t^2 G} \, dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V^2}{G} \left( \frac{1}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{t^2} \, dA \right) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V^2 f_s}{GA} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V^2}{GA_r} \, dx \quad (\text{A.13})$$

sendo  $f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{t^2} \, dA$  o factor de forma da secção transversal para o esforço transverso. O valor

deste integral é para as diversas secções mais utilizadas o seguinte:

Secção rectangular	$f_s = 6/5$	$\alpha_s = 3/2$
Secção circular (compacta)	$f_s = 10/9$	$\alpha_s = 4/3$
Secção circular oca ( $\phi_m$ - diâmetro médio , $t$ - espessura)	$f_s = 2$	$\alpha_s = \frac{4}{3} * \frac{(3\phi_m^2 + t^2)}{(\phi_m^2 + t^2)} \approx 4$
Secção em I	$f_s = \frac{\text{Área Total}}{\text{Área da Alma}}$	$\alpha_s = f_s$

Define-se por área de corte a razão,  $A_r = \frac{A}{f_s}$ .

O parâmetro  $\alpha_s$  é a razão entre a tensão tangencial máxima ao nível do centro de gravidade e devido ao esforço transversal e a tensão tangencial média na secção.

### A.3.2.2- Barra Sujeita ao Momento Torçor, T

Para uma secção axissimétrica sujeita à torção, as tensões tangenciais são:  $\tau = \frac{T}{J} \rho$ . Substituindo esta definição em (A.12.b) obtemos a energia ou trabalho de deformação elástico de uma barra à torção:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau^2}{G} dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{T^2}{GJ^2} \rho^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GJ^2} \left( \int_A \rho^2 dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GJ} dx \quad (\text{A.14})$$

### A.3.3.- Caso Geral de Solicitação de uma Barra

Em barras com comportamento elástico linear e na hipótese dos pequenos deslocamentos o princípio da sobreposição de efeitos é válido. Este permite-nos escrever a energia ou trabalho de deformação interna de uma barra sujeita ao caso geral de esforços como sendo:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V^2}{GA_r} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GJ} dx \quad (\text{A.15})$$

### A.3.4- Energia ou Trabalho de deformação para o caso mais geral de tensões

Como vimos para o estado uniaxial de tensões e para o estado de corte puro a energia de deformação específica (ou densidade de energia de deformação) é dada respectivamente pelas expressões (A.6.b) e (A.7). Admitindo o comportamento elástico linear dos materiais aquelas expressões passam a escrever-se, para a direcção X e plano XOY como:

$$u = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \quad , \quad u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} \quad (\text{A.16}) \text{ e } (\text{A.17})$$



As igualdades anteriores podem ser generalizadas para as outras direcções Y e Z, e planos XOZ e YOZ. Sendo válido princípio da sobreposição de efeitos, designando a energia de deformação específica para o estado geral de tensões é:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (A.18)$$

escrevendo-se vectorialmente:

$$u = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\}, \quad (A.20)$$

$$\text{com } \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \text{ e } \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} .$$

Como se sabe de Resistência de Materiais, o campo de deformações pode escrever-se em função do campo de tensões:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (A.21.a)$$

com  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Matricialmente estas igualdades tomam o aspecto:

$$\{\varepsilon\} = [S] * \{\sigma\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\nu & 1 & -\nu & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\nu & -\nu & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2(1+\nu) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2(1+\nu) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2(1+\nu) \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (A.21.b)$$

Substituindo (A.21.a) em (A.18) a energia de deformação específica escrever-se-á:

$$u = \left( \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] \right) + \left( \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right) \quad (A.22)$$

ou ainda:

$$u = (u_v) + (u_d)$$

sendo:

$u_v$  = a parcela de energia de deformação específica associada à variação de volume do material, e,

$u_d$  = a parcela de energia de deformação específica associada à distorção do material.

A energia (ou trabalho) de deformação de um corpo é o integral da densidade de energia de deformação no volume do corpo que se escreve:

$$U = \int_V u \, dV = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} \, dV \quad (\text{A.23})$$

## B.- Princípio dos Trabalhos Virtuais

### B.1- Corpos Rígidos

O trabalho realizado por forças reais durante um deslocamento virtual é chamado *trabalho virtual*. Um deslocamento diz-se virtual quando for imaginário, admitindo-se ser muito pequeno de modo a não alterar as linhas de acção das cargas e esforços internos.

#### B.1.1- Princípio dos Deslocamentos Virtuais

**Enunciado:** *Quando a um corpo rígido sob a acção de um sistema de forças generalizadas (forças propriamente ditas e momentos) em equilíbrio é imposto um deslocamento virtual generalizado (de translação e/ou rotação) o trabalho virtual realizado pelo sistema de forças é nulo.*

Note-se que os termos deslocamentos e forças devem ser entendidos aqui em sentido lato.

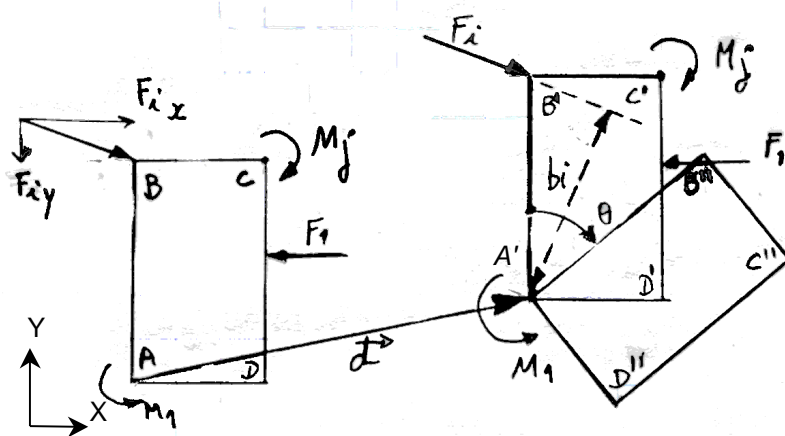


Figura B.1

Observe-se atentamente a figura B.1. Impôs-se um deslocamento virtual o qual pode ser decomposto numa translação  $d$  e numa rotação  $\theta$  em torno do ponto A'. Repare-se que todos os pontos do corpo têm a mesma translação e posteriormente a mesma rotação.

Cada força  $P_i$ , durante a translação  $d$ , realizará trabalho virtual que será a soma dos trabalhos de cada uma das suas componentes  $P_{ix}$  e  $P_{iy}$  (segundo um referencial fixo XOY). O trabalho de cada componente é o produto dessa componente pela componente correspondente do vector de translação, sendo o trabalho positivo se as componentes referidas tiverem o mesmo sentido. Assim o trabalho realizado pela força  $P_i$  será :

$$W_{P_i} = P_{ix} * d_{ix} + P_{iy} * d_{iy}$$

com  $d_{ix} = d * \cos(\alpha)$  e  $d_{iy} = d * \sin(\alpha)$ , sendo  $d$  o vector de deslocamento de translação e  $\alpha$  a sua orientação relativamente ao eixo X.

O trabalho total realizado pelas forças e associado à translação será :

$$W_t = \sum (P_{ix} * d_{ix} + P_{iy} * d_{iy})$$

Como o ponto de aplicação de todas as forças tem o mesmo deslocamento  $d$ , podemos escrever:

$$W_t = (\sum P_{ix}) * d * \cos(\alpha) + (\sum P_{iy}) * d * \sin(\alpha)$$

Mas se as forças estão em equilíbrio, então  $\sum P_{ix} = 0$  e  $\sum P_{iy} = 0$  pelo que se conclui que  $W_t = 0$

O trabalho realizado por cada força  $P_i$  quando o corpo roda  $\theta$  é identificado pelo trabalho realizado pelo momento dessa força em torno do ponto de rotação. O momento referido é  $(P_i * b_i)$  sendo  $b_i$  o braço da força em relação ao ponto de rotação, e o trabalho  $(P_i * b_i) * \theta$ . Os momentos aplicados  $M_i$  realizarão o trabalho  $M_i * \theta$ .

O trabalho total associado à rotação será:

$$W_r = \sum (P_i * b_i) * \theta + \sum M_j * \theta = (\sum (P_i * b_i) + \sum M_j) * \theta$$

Como o corpo está em equilíbrio então  $(\sum (P_i * b_i) + \sum M_j) = 0$  pelo que vem  $W_r = 0$ .

Concluimos então que num corpo rígido o trabalho total realizado pelas forças aplicadas, também designado como trabalho externo,  $W_{ext}$ , é nulo.

$$W_{ext} = W_t + W_r = 0 \quad (B.1)$$

ficando assim demonstrado o princípio dos deslocamentos virtuais para corpos rígidos.

## B.2- Corpos Deformáveis

### B.2.1.- Princípio dos Trabalhos Virtuais

O Princípio dos Trabalhos Virtuais aplicado a corpos flexíveis deverá considerar o trabalho realizado quer pelas forças externas como o realizado pelas forças internas (esforços ou tensões).

O trabalho das forças exteriores resulta do deslocamento do ponto de aplicação das mesmas.

O trabalho das forças internas pode ser interpretado de duas formas:

- (i) - como o trabalho realizado pelas tensões durante a deformação das fibras/pontos onde estas actuam,
- (ii) ou como o trabalho realizado pelos esforços (resultante das tensões) quando o ponto de aplicação deste (em geral o centro de gravidade das secções) se deforma.

Para explicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais há que considerar uma estrutura e dois sistemas independentes, um de forças e outro de deslocamentos.

Imagine-se uma estrutura sujeita ao primeiro sistema, um sistema de forças aplicadas. Estas forças ( $F_i$ ) são definidas em sentido lato e por isso podem ser forças pontuais  $P_i$ , forças distribuídas  $p_i(x)$ , forças de massa  $f_i$ , e momentos  $M_i$ . Este conjunto de cargas deve estar em equilíbrio com as forças internas e reacções de apoio. As forças internas são as tensões  $\{\sigma\}$  no volume do corpo, ou a resultante destas nas secções transversais, que como se sabe são os esforços (N, M, V, e T). Por outro lado as reacções de apoio são as forças "externas" ou tensões "externas" localizadas nos pontos de apoio da estrutura. Resumindo podemos afirmar que a estrutura está sujeita a um campo de forças aplicadas em equilíbrio com o campo de esforços e/ou campo de tensões. Entretanto verificamos que estrutura apresentará uma deformada  $v_F(x)$ .

Imagine-se agora a mesma estrutura sujeita ao segundo sistema, um sistema de deslocamentos. Os deslocamentos  $D_i$  (as translações,  $u_i$ , e rotações,  $\theta_i$ ) de pontos da estrutura estão associados a deformações  $\{\epsilon\}$  de suas fibras (taxa de variação dos "deslocamentos" segundo cada "direcção" - extensões,  $\epsilon_{ij}$ , e distorções,  $\gamma_{ij}$ ). Os deslocamentos e deformações devem garantir a continuidade da estrutura (por exemplo a continuidade do seu eixo) e respeitar as condições de apoio. Diz-se então que o campo de deslocamentos e deformações são compatíveis entre si e com as condições de apoio.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que, sendo um dos sistemas virtual, se satisfaz a seguinte igualdade:

$$\sum_i F_i D_i = \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV \quad (B.2)$$

The diagram shows the relationship between the two systems. On the left, the 'Sistema Equilibrado' (Equilibrated System) is represented by a box labeled 'Campo de Forças' (Force Field) and a box labeled 'Campo de Tensões' (Stress Field). A vertical dashed line separates the two boxes, with the text 'Sistema Equilibrado' written between them. On the right, the 'Sistema Compatível' (Compatible System) is represented by a box labeled 'Campo de Deslocamentos' (Displacement Field) and a box labeled 'Campo de deformações' (Strain Field). A vertical dashed line separates the two boxes, with the text 'Sistema Compatível' written between them. The equation  $\sum_i F_i D_i = \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV$  is positioned above the diagram, with  $\sum_i F_i$  and  $D_i$  aligned with the 'Campo de Forças' and 'Campo de Deslocamentos' boxes respectively, and  $\int_V \{\sigma\}^T$  and  $\{\epsilon\} dV$  aligned with the 'Campo de Tensões' and 'Campo de deformações' boxes respectively. Solid arrows point from the 'Campo de Forças' box to the 'Campo de Deslocamentos' box, and from the 'Campo de Tensões' box to the 'Campo de deformações' box. Dashed arrows point from the 'Campo de Deslocamentos' box to the 'Campo de deformações' box.

à qual corresponde o enunciado:

- O produto do campo de forças  $F_i$  pelo campo de deslocamentos  $D_i$  é igual ao produto do campo de tensões  $\{\sigma\}$  (em equilíbrio com o campo de forças  $F_i$ ), pelo campo de deformações  $\{\epsilon\}$  (compatível com o campo de deslocamentos), ou;

$$\sum F_i D_i = \int_0^L N d\delta + \int_0^L M d\theta + \int_0^L V d\lambda + \int_0^L T d\phi \quad (B.3)$$

- O produto do campo de forças  $F_i$  pelo campo de deslocamentos  $D_i$ , é igual ao produto do campo de esforços ( $N$ ,  $M$ ,  $V$ , e  $T$  que equilibram as forças  $F_i$ ) pelo campo das deformações ( $d\delta$ ,  $d\theta$ ,  $d\lambda$  e  $d\phi$  compatível com campo de deslocamentos,  $D_i$ ).

O primeiro termo das igualdades (B.2) e (B.3) é o trabalho virtual externo,  $W_{ext}$ , e o segundo o trabalho virtual interno,  $W_{int}$ , logo podemos escrever:

$$W_{ext} = W_{int} \quad (B.4)$$

Nas igualdades (B.2) e (B.3) a força  $F_i$  representa simbolicamente o sistema de forças aplicadas e  $D_i$  o deslocamento do ponto de aplicação das mesmas. Assim no caso de uma barra,  $F_i$  pode significar uma a força pontual  $P_i$ , e/ou o momento  $M_i$ , e/ou a força distribuída  $p_i(x)$  ao longo do eixo  $x$  da barra, e/ou as forças de massa  $f_i$ . Por outro lado os deslocamentos  $D_i$  são as translações  $u_i$ ,  $u_i(x)$  ou rotações  $\theta_i$  dos pontos de aplicação das forças referidas. O trabalho virtual externo pode então ser expandido como se mostra:

$$W_{ext} = \sum_i F_i * D_i = \sum_i P_i * u_i + \sum_i M_i * \theta_i + \sum_i \int_{x1}^{x2} p_i(x) u_i(x) dx + \int_V f_i u_i dV \quad (B.5)$$

O trabalho virtual interno, definido na expressão (B.2), é o integral do produto da tensão normal (ou tangencial) em cada ponto do corpo pela correspondente extensão (ou distorção). No caso de peças lineares (barras) pode ser escrito como o segundo termo da expressão (B.3), ou seja, como integral do produto de cada esforço pela deformação da linha elástica associada ao esforço em questão. Em resumo temos:

$$W_{int} = \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV = \int_0^L N d\delta + \int_0^L M d\theta + \int_0^L V d\lambda + \int_0^L T d\phi \quad (B.6)$$

O PTV escrito como em (B.2) ou (B.3) é válido para qualquer tipo de estruturas com comportamento elástico linear ou inelástico.

No caso particular de barras com comportamento elástico linear, as deformações da linha elástica  $d\delta$ ,  $d\theta$ ,  $d\lambda$  e  $d\phi$  (expressão B.6) relacionam-se linearmente com os esforços  $N^*$ ,  $M^*$ ,  $V^*$  e  $T^*$  que lhes causam essas deformações, e podem ser escritas em termos da coordenada de posição,  $x$ , da secção transversal ao longo da barra, como se mostra na figura seguinte.

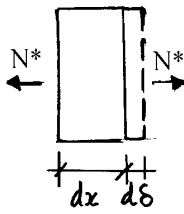
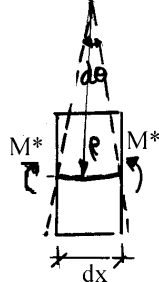
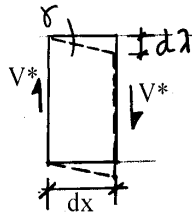
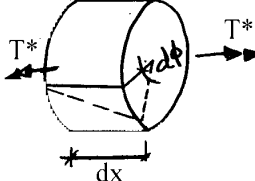
 $d\delta = \epsilon dx = \frac{\sigma}{E} dx = \frac{N^*}{EA} dx \quad (B.7.a)$ $d\delta = \alpha \Delta T^* dx \quad (B.7.a')$ <p>(para a variação de temperatura uniforme)</p>	 $d\theta = \frac{1}{\rho} dx = \frac{M^*}{EI} dx \quad (B.7.b)$
 $d\lambda = \gamma dx = \frac{\tau}{G} dx = \frac{V^* \alpha_s}{A} dx \quad (B.7.c)$	 $d\phi = \gamma dx = \frac{\tau}{G} dx = \frac{T^*}{GJ} dx \quad (B.7.d)$

Figura B.2

Em resumo podemos escrever simbolicamente o Princípio dos Trabalhos Virtuais como sendo:

$$\sum \left( \begin{matrix} \text{Forças do} \\ \text{Sistema 1} \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} \text{Deslocamentos} \\ \text{do Sistema 2} \end{matrix} \right) = \int_V \left( \begin{matrix} \text{Tensões do} \\ \text{Sistema 1} \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} \text{"Extensões"} \\ \text{do Sistema 2} \end{matrix} \right) dV \quad (B.8)$$

ou

$$\sum \left( \begin{matrix} \text{Forças do} \\ \text{Sistema 1} \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} \text{Deslocamentos} \\ \text{do Sistema 2} \end{matrix} \right) = \sum \int_0^L \left( \begin{matrix} \text{Esforços do} \\ \text{Sistema 1} \end{matrix} \right) \times \left( \begin{matrix} \text{Deformações} \\ \text{do Sistema 2} \end{matrix} \right) dx \quad (B.9)$$

Consoante o sistema 1 ou 2 se adopte como virtual, assim se obtém o princípio dos trabalhos virtuais para forças ou para deslocamentos.

### B.2.1.1.- Princípio dos Trabalhos Virtuais para Forças Virtuais

Consideremos uma estrutura deformada pelo efeito de forças aplicadas, de causas ambientais

como a temperatura ou a retracção, etc.. Seja este o estado real de deformação  $\{\varepsilon\}$  compatível com os deslocamentos em  $n$  coordenadas,  $D_1, D_2, \dots, D_n$ . Suponha agora que antes destas deformações reais terem sido introduzidas, a estrutura fora sujeita a um sistema de forças virtuais  $F_1, F_2, \dots, F_n$  nas coordenadas  $1, 2, \dots, n$ , gerando um estado de tensões virtual  $\{\sigma\}$ , e de esforços virtual. O campo de forças virtuais está em equilíbrio com o campo de tensões (ou esforços) mas não precisa de corresponder ao campo de deslocamentos  $\{D\}$ . O PTV apresentado desta forma pode designar-se por Princípio das Forças Virtuais (PFV) e estabelece que:

$$\sum F_i * D_i = \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (\text{B.2})\text{-rep.}$$

Simbolicamente podemos apresentá-lo como:

$$\sum \left( \begin{array}{c} \text{Forças} \\ \text{Virtuais em i} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{Deslocamentos} \\ \text{reais em i} \end{array} \right) = \int_V \left( \begin{array}{c} \text{Tensões} \\ \text{Virtuais} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{Deformações} \\ \text{reais} \end{array} \right) dV \quad (\text{B.10})$$

O PFV pode ser usado para calcular deslocamentos reais em qualquer ponto de uma estrutura, sendo nesse caso também conhecido por "método da carga unitária para o cálculo de deslocamentos".

#### B.2.1.1.1- Método da Carga Unitária

Se pretendermos determinar deslocamentos reais o campo de forças virtuais é constituído por uma única força porque o processo só nos permite o cálculo de um deslocamento de cada vez. A força virtual referida é de valor unitário e é aplicada à estrutura no sentido e direcção em que se pretende quantificar o deslocamento causado pelas cargas reais. As tensões virtuais associadas à força virtual unitária designar-se-ão por  $\{\sigma_{uj}\}$  e os esforços por  $N_u, M_u, V_u$  e  $T_u$ . A equação (B.2) ficará:

$$D_j = \int_V \{\sigma_{uj}\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (\text{B.11})$$

Atendendo agora à equação (B.6) podemos acrescentar:

$$D_j = \int_V \{\sigma_u\}^T \{\varepsilon\} dV = \int_0^L N_u d\delta + \int_0^L M_u d\theta + \int_0^L V_u d\lambda + \int_0^L T_u d\phi \quad (\text{B.12})$$

sendo as deformações  $d\delta, d\theta, d\lambda$  e  $d\phi$  o campo de deformações real do eixo da peça linear. Ora para barras com comportamento elástico linear estas deformações estão relacionadas com as cargas reais

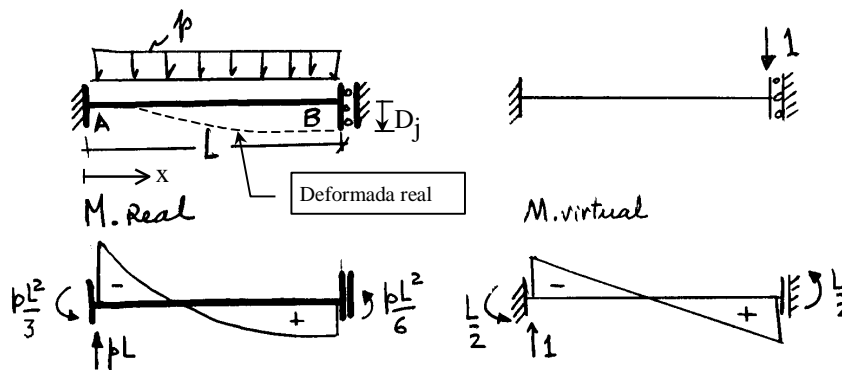


aplicadas à estrutura através das expressões (B.7.a) a (B.7.d)) fazendo  $N^*=N$ ,  $M^*=M$ ,  $V^*=V$  e  $T^*=T$  sendo  $N$ ,  $M$ ,  $V$  e  $T$  os esforços devidos às cargas reais. A expressão (B.10) ficará com o seguinte aspecto mais prática utilização:

$$D_j = \int_0^L \frac{N_u^* N}{EA} dx + \int_0^L \frac{M_u^* M}{EI} dx + \int_0^L \frac{V_u^* V}{GA_c} dx + \int_0^L \frac{T_u^* T}{GJ} dx \quad (B.13)$$

**EXEMPLO B.1**

Calcule a flecha no ponto B atendendo só à deformação da barra por flexão.



Resolução:

O sistema de cargas reais gera um diagrama de momentos real :  $M(x) = -\frac{pl^2}{3} + plx - \frac{px^2}{2}$

Colocando uma carga virtual em B ( $\downarrow$ ) o diagrama de momentos é :  $M_u(x) = -\frac{L}{2} + x$

A flecha obtém-se recorrendo a (B.14):  $D_j = \int_0^L \frac{M_u(x) * M(x)}{EI} dx = \frac{pl^4}{24EI}$

**B.2.1.2.- Princípio dos Trabalhos Virtuais para Deslocamentos Virtuais**

A apresentação do PTV desta forma assume o segundo sistema, o dos deslocamentos, como virtual. Imagine-se uma estrutura sujeita a um conjunto de forças real  $F_i$  em equilíbrio com os campos reais de tensões  $\{\sigma\}$  e de esforços  $N$ ,  $M$ ,  $V$  e  $T$ . A estrutura sendo elástica apresentará uma deformada real,  $v_F(x)$ . Podemos impor um acréscimo de deformação, ou seja um campo de deslocamentos virtual  $D_i$  e campo de deformações virtual  $\{\varepsilon\}$  compatíveis com as condições de fronteira. As deformações virtuais lidas no eixo da barra são  $d\delta$ ,  $d\theta$ ,  $d\lambda$  e  $d\phi$ .

O PTV apresentado desta forma designa-se por Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV) e estabelece que:

$$\sum F_i * D_i = \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (\text{B.2-rep.})$$

Simbolicamente podemos apresentá-lo como:

$$\sum \begin{pmatrix} \text{Forças} \\ \text{reais em i} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Deslocamentos} \\ \text{virtuais em i} \end{pmatrix} = \int_V \begin{pmatrix} \text{Tensões} \\ \text{Reais} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Deformações} \\ \text{virtuais} \end{pmatrix} dV \quad (\text{B.15})$$

O PDV é útil quando se pretende conhecer o valor de determinada força real na direcção e sentido de determinado deslocamento virtual imposto, desde que os campos de tensões ou esforços sejam conhecidos. Como se sabe as reacções de apoio pertencem ao campo de forças aplicadas à estrutura e estão em equilíbrio com os esforços internos ou tensões. Na verdade como em geral as reacções são desconhecidas o PDV torna-se bastante útil para a sua determinação, exigindo-se contudo que a estrutura seja cinematicamente determinada.

#### B.2.1.2.1- Aplicação do PTV (PDV) ao cálculo de reacções de apoio de estruturas cinematicamente determinadas.

A aplicação do PDV para efeitos de cálculo de reacções de apoio exige que se imponha um único deslocamento virtual à estrutura no sentido reacção de apoio ( $R_{ap}$ ) a determinar. Sendo o nosso objectivo o de calcular reacções de apoio chegamos a um equívoco porque, de acordo com o PTV, as deformações impostas tem de ser compatíveis com as condições de apoio da estrutura, a qual não permite *a priori*, a imposição desse tipo de movimento no apoio.

Assim temos que nos socorrer de um artifício que consiste em libertar o apoio na direcção da reacção e em simultâneo colocar uma força simulando a reacção existente,  $R_{ap}$ . Desta forma já é possível impor o tal deslocamento unitário, na direcção da reacção. Aplique-se agora o princípio dos trabalhos virtuais, expresso pela igualdade (B.2). Nesta igualdade o campo de forças aplicado e representado por  $F_i$  é constituído pela reacção  $R_{ap}$ , por forças nodais aplicadas e pelas restantes acções de vão. Por conveniência destacaremos na expressão (B.2) as parcelas relativas à reacção e às forças nodais, pelo que (B.2) ficará com o seguinte aspecto:

$$R_{ap} * (1) + \sum_j^{\text{nodais}} F_j D_j + \sum_i^{\text{vão}} F_i D_i = \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon_{du}\} dV \quad (\text{B.16})$$

sendo:

- (1),  $D_i$  e  $D_j$  o campo de deslocamentos virtuais e  $\{\varepsilon_{du}\}$  o campo de deformações virtuais, devidos à imposição do deslocamento virtual unitário (1);
- $R_{ap}^*(1)$  o trabalho virtual externo realizado pela reacção de apoio;
- $\sum F_j D_j$  o trabalho virtual externo realizado pelas restantes forças nodais;
- $\sum F_i D_i$  o trabalho virtual externo realizado pelas acções de vão aplicadas (forças pontuais e/ou distribuídas, e, forças de massa)
- $\int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon_{du}\} dV$  o trabalho virtual interno acumulado pela estrutura na forma de energia de deformação interna.

Considerando agora a definição (B.6) a expressão anterior fica:

$$R_{ap}^*(1) + \sum_j^{nodais} F_j D_j + \sum_i^{vão} F_i D_i = \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon_{du}\} dV = \int_0^L N d\delta_u + \int_0^L M d\theta_u + \int_0^L V d\lambda_u + \int_0^L T d\phi_u \quad (B.17)$$

sendo as deformações  $d\delta_u$ ,  $d\theta_u$ ,  $d\lambda_u$  e  $d\phi_u$  o campo de deformações virtual lido no eixo da peça linear. Estas, para barras com comportamento elástico linear, valem (ver expressões (B.7.a) a (B.7.d)):

$$d\delta_u = \frac{N_{du}}{EA} dx, \quad d\theta_u = \frac{M_{du}}{EI} dx, \quad d\lambda_u = \frac{V_{du}}{EA_c} dx, \quad d\phi_u = \frac{T_{du}}{GJ} dx \quad (B.18)$$

sendo  $N_{du}$ ,  $M_{du}$ ,  $V_{du}$ , e  $T_{du}$  os esforços na estrutura quando se impõe um deslocamento unitário (índice  $du$ ). Substituindo (B.18) em (B.17) obtemos:

$$R_{ap}^*(1) + \sum_j^{nodais} F_j D_j + \sum_i^{vão} F_i D_i = \int_0^L \frac{N^* N_{du}}{EA} dx + \int_0^L \frac{M^* M_{du}}{EI} dx + \int_0^L \frac{V^* V_{du}}{GA_c} dx + \int_0^L \frac{T^* T_{du}}{GJ} dx \quad (B.19)$$

Entretanto sabemos pelo Teorema dos Deslocamentos Recíprocos ou de Maxwell que em estruturas com comportamento elástico linear os esforços  $N_u$ ,  $M_u$ ,  $V_u$  e  $T_u$  devidos a uma força unitária aplicada em determinado ponto são proporcionais aos esforços devidos a um deslocamento unitário imposto nesse ponto e que valem  $N_{du}$ ,  $M_{du}$ ,  $V_{du}$  e  $T_{du}$ . Mas no problema em estudo o deslocamento real segundo a reacção de apoio é nulo. Pode ser determinado pelo método da carga unitária mostrado na expressão (B.13). Nesta expressão o segundo termo será nulo e como é proporcional ao segundo termo da expressão (B.19) este também o será. Esta conclusão importante permite-nos simplificar a expressão (B.19) que se reduzir a:

$$R_{ap} \cdot (1) + \sum_j^{\text{nodais}} F_j D_j + \sum_i^{\text{vão}} F_i D_i = 0 \quad (\text{B.20})$$

Salienta-se que o segundo termo de (B.19) representa o trabalho interno associado à deformação imposta e que esta parcela é sempre nula quer para estruturas **isostáticas** como para estruturas **hiperestáticas**, quando o deslocamento imposto corresponde a uma restrição de apoio nula.

O desenvolvimento do problema exemplo B.4 permite-nos demonstrar o seguinte corolário:

Corolário:

*Numa estrutura cinematicamente determinada, à qual se impôs um deslocamento virtual no sentido de um dos seus graus de liberdade cinemática, o trabalho efectuado pelas cargas de vão é igual ao valor simétrico do trabalho efectuado pelas forças de fixação das cargas de vão.*

Esta afirmação permite escrever:

$$\sum_i^{\text{vão}} F_i D_i = - \sum_k^{\text{vão}} F_{\text{fix.k}} D_k \quad (\text{B.21})$$

sendo  $(-\sum_k^{\text{vão}} F_{\text{fix.k}} D_k)$  o trabalho efectuado pelas forças de fixação  $F_{\text{fix.k}}$  das  $k$  acções de vão.

Substituindo em (B.20) obtemos a expressão seguinte de grande utilidade prática:

$$R_{ap} \cdot 1 + \sum_j^{\text{nodais}} F_j D_j = + \sum_k^{\text{vão}} F_{\text{fix.k}} D_k \quad (\text{B.22})$$

Como o segundo termo da equação (B.22) representa o trabalho virtual realizado pelas forças de fixação, que são esforços internos, designa-se por vezes esse termo como trabalho virtual interno. Trata-se de uma designação de certa forma **abusiva**, mas que é adoptada muitas vezes na prática. Na verdade o trabalho referido é *externo* (mas negativo) pois representa o produto das forças de vão pelo deslocamento virtual do ponto de aplicação dessas forças. O trabalho interno seria dado pelo 2º termo da expressão (B.19) que, como já se viu antes, é nulo quando os deslocamentos impostos são "segundo" uma reacção de apoio. Por oposição à designação adoptada para o segundo termo da expressão (B.22), nomeia-se o primeiro termo como trabalho virtual externo. Atendendo ao exposto neste parágrafo e salvaguardando o rigor de linguagem, podemos adoptar a seguinte igualdade e designações:

$$W_{ext} = W_{int} \tag{B.23}$$

$$W_{ext} = R_{ap} \times 1 + \sum_j^{nodais} F_j D_j \tag{B.24}$$

$$W_{int} = \sum_k^{vão} F_{fix,k} D_k \tag{B.25}$$

**EXEMPLO B.3**

Para a viga da figura B.4 calcule a reacção vertical do apoio B em função da coordenada de posição  $x$  da carga pontual  $P$ .

Resolução:

Começa-se por substituir o apoio fixo B por um outro deslizante vertical e sujeito à força reactiva  $R_{ap}$ .

Desenha-se novamente a estrutura à qual se impõe um deslocamento unitário virtual no sentido de  $R_{ap}$ , obtendo-se o "diagrama" de deslocamentos e deformações virtuais (figura B.4.b).

Verificamos que as barras apenas apresentam deslocamentos de corpo rígido. Como não se deformam (não há variação de curvaturas) o trabalho interno respeitante ao segundo termo da expressão (B.19) é nulo, reduzindo-se à expressão (B.20).

A deformada da estrutura é  $\eta(x)$ :

- para  $x < a+b$  :  $\eta(x) = (c+d)*(x-a)/(b*d)$
- para  $x > a+b$  :  $\eta(x) = (a+b+c+d-x)/d$

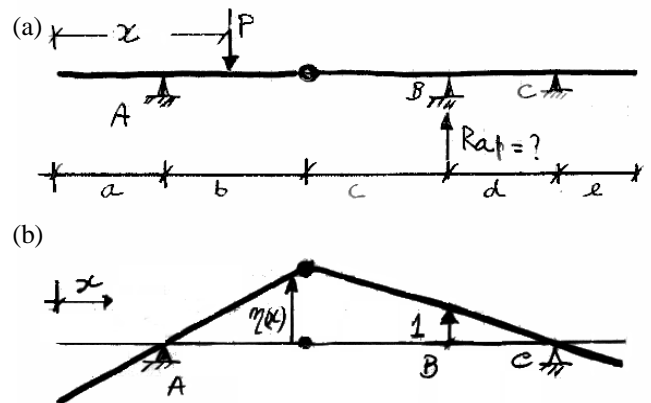


Figura B.4

O trabalho exterior realizado por  $P$  vale  $P*(-\eta(x))$  e o realizado por  $R_{ap}$  vale  $R_{ap}*(1)$ . Logo de (B.20) vem:

$$R_{ap} * 1 + P*(-\eta(x)) = 0 \Rightarrow R_{ap} = P*\eta(x)$$

Chama-se à atenção que a função  $\eta(x)$  da deformada da estrutura é correntemente conhecida por "linha de influência da reacção horizontal,  $R_{ap}$ ". Ela representa a reacção vertical no apoio em função da posição  $x$  de uma carga unitária  $P$ .

Um problema semelhante é o da seguinte estrutura da figura B.5 na qual se pretende calcular a reacção horizontal no apoio direito. Repare-se que nestes dois exemplos a libertação de apoio torna a estrutura num mecanismo (ou hipostática) com um grau de liberdade.

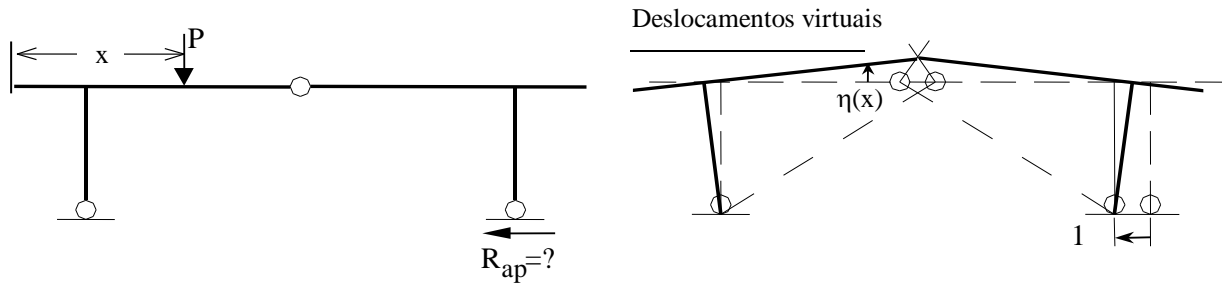


Figura B.5 - Reacção de apoio  $R_{ap}$  em função da posição da carga  $P$ .

EXEMPLO B.4

Calcule a reacção vertical no apoio direito da seguinte barra encastrada - encastrada sujeita à carga distribuída  $p$  e força pontual  $F$ . (figura B.6)

Resolução:

Substituímos o encastramento por um apoio deslizante vertical e colocamos uma força  $R_{ap}$  de baixo para cima, que sendo uma reacção está em equilíbrio com as cargas  $p$  e  $F$ .

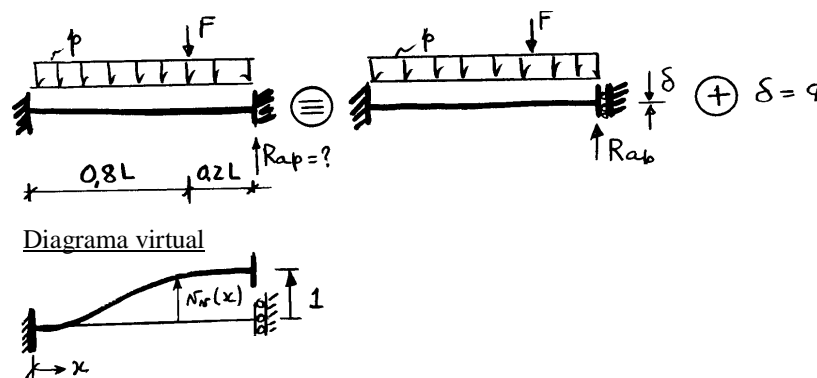


Figura B.6

Logo não há deslocamento vertical real neste apoio. De seguida impõe-se um deslocamento vertical virtual e desenhamos a deformada virtual da estrutura,  $v_v(x)$ , que se expressa por:

$$v_v(x) = \frac{3}{L^2} x^2 - \frac{2}{L^3} x^3 \quad (\text{equação da linha elástica}).$$

Recorrendo a (B.19):

$$R_{ap} * 1 + F * (-v_v(0.8 * L)) + \int_0^L p * (-v_v(x)) dx = \int_0^L \frac{M(x) * M_{du}(x)}{EI} dx$$

O trabalho realizado por  $R_{ap}$  é  $R_{ap} * 1$ . O realizado pelas cargas aplicadas é negativo pois o sentido destas é contrário ao do deslocamento dos seus pontos de aplicação. O somatório  $\sum F_i D_i$  está expandido como se explica na expressão (B.5). Poderá constatar que o integral do segundo termo é nulo porque o apoio não tem deslocamento real (como exercício pode desenvolvê-lo) mais uma vez a equação (B.19) se transforma na (B.20).

Da igualdade anterior obtemos:

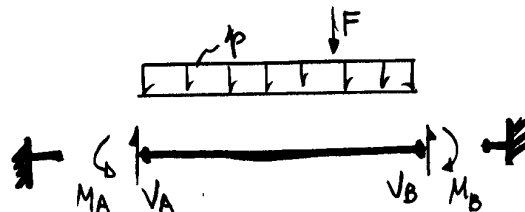
$$R_{ap} * 1 = +F * \left( \frac{3}{L^2} (0.8L)^2 - \frac{2}{L^3} (0.8L)^3 \right) \frac{1}{2} + \int_0^L p * \left( \frac{3}{L^2} x^2 - \frac{2}{L^3} x^3 \right) dx = 0 \Rightarrow R_{ap} = 0.896 * F + 0.5 * p * L$$

Corolário:

*Numa estrutura cinematicamente determinada, à qual se impôs um deslocamento virtual no sentido de um dos seus graus de liberdade cinemática, o trabalho efectuado pelas cargas de vão é igual ao valor simétrico do trabalho efectuado pelas forças de fixação das cargas de vão.*

A barra do Exemplo B.4 é cinematicamente determinada. O trabalho efectuado pelas forças de vão é como vimos:

$$F * (-v_v(0.8L)) + \int_0^L p * (-v_v(x)) dx \Rightarrow -[0.896 * F + 0.5 * p * L]$$



$$V_A = 0.5pL + 0.104 F, \quad V_B = 0.5pL + 0.896 F$$

$$M_A = pL^2/12 + 0.032 FL, \quad M_B = pL^2/12 + 0.128 FL$$

Figura B.7

Se substituírmos as cargas de vão pelas correspondentes forças de fixação (ver figura B.7), o trabalho por elas realizado durante o mesmo deslocamento virtual é:

$0.896F * (+1) + 0.5pL * (+1)$  que, como se constata, é o simétrico do resultado anterior.

**EXEMPLO B.5**

Determine a reacção horizontal em C.

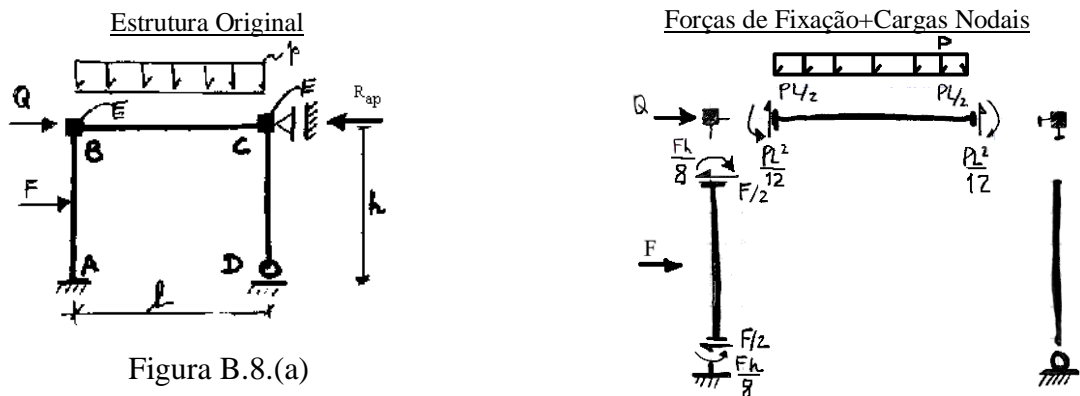
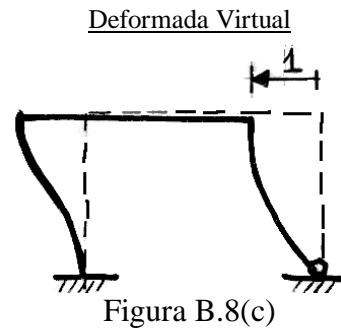


Figura B.8.(a)

$$W_{ext} = Rap \times 1 + Q \times (-1)$$

$$W_{int} = \frac{F}{2} \times 1 + \frac{Fh}{8} \times 0 + \frac{pl^2}{12} \times 0 \times [2] + \frac{pl}{2} \times 0 \times [2]$$

De B.22 vem  $W_{ext} = W_{int} \Rightarrow Rap = \frac{F}{2} + Q$



**EXEMPLO B.6**

Qual o valor da força de fixação  $K_{21}$  quando se impõe  $\theta=1$  ?

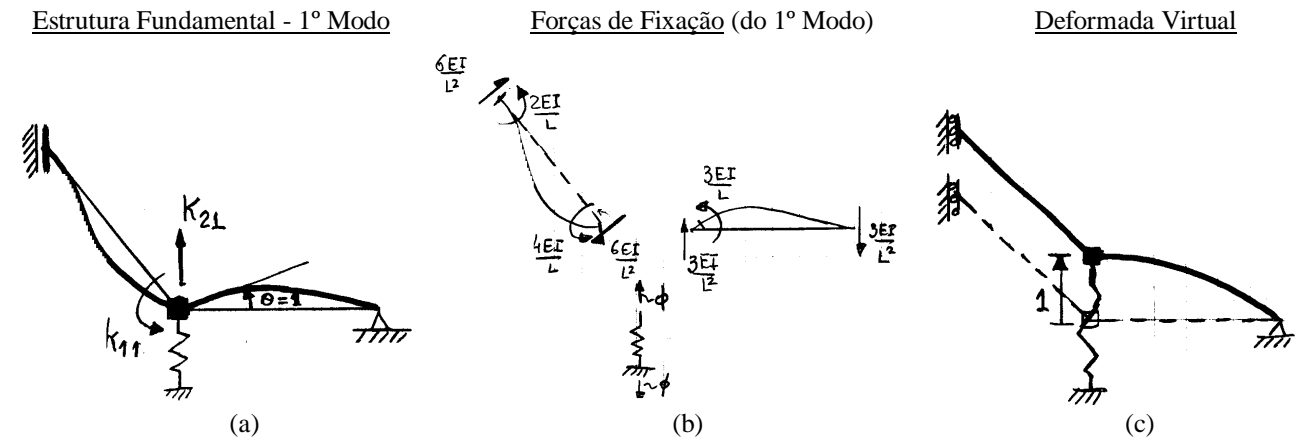


Figura B.9

- 1º - Obter os esforços de fixação associados à rotação imposta  $\theta=1$  (figura B.9. (b))
- 2º - Impor à estrutura fundamental um deslocamento virtual unitário no sentido de  $K_{21}$  ((figura B.9. (c))

3º-  $W_{ext} = K_{21} \times 1 + K_{11} \times 0$

$$W_{int} = \frac{3EI}{L^2} \times 1 + \frac{6EI}{L^2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-1) + \frac{6EI}{L^2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (+1) + \frac{4EI}{L} \times 0 + \frac{2EI}{L} \times 0 + \frac{3EI}{L} \times 0$$

4º-  $W_{ext}=W_{int} \Rightarrow K_{21} = \frac{3EI}{L^2}$



### B.2.2.- Demonstração do PTV

A demonstração do PTV pode ser efectuada a partir da demonstração do PDV ou do PFV porque estes métodos são em tudo semelhantes (em estruturas com comportamento elástico linear) diferindo na escolha do sistema virtual, ou seja, forma como se apresenta o PTV. Por ser mais compreensível apresentamos a demonstração do PFV (tradução e adaptação de [2]).

... Consideremos uma estrutura linear elástica sujeita a um sistema de forças reais  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , causando esforços  $N, M, V$  e  $T$  em qualquer secção. As forças foram aplicadas gradualmente à medida que se manifestavam deslocamentos  $D_i$  e deformações. O trabalho externo é igual ao trabalho interno (ou energia de deformação elástica-(ver 3.15)):

$$W = \frac{1}{2} \sum F_i D_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V^2}{GA_r} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GJ} dx = U \quad (\text{B.22})$$

Suponha que enquanto as forças  $F_i$  eram aplicadas já existia uma força virtual  $Q_j$  actuando na coordenada  $j$ . Esta força induz em qualquer secção esforços  $N_{Q_j}, M_{Q_j}, V_{Q_j}$  e  $T_{Q_j}$ . O trabalho externo e interno total (real+virtual) durante a aplicação das forças  $F_i$  é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum F_i D_i + Q_j D_j = & \frac{1}{2} \left[ \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx + \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \int_0^L \frac{V^2}{GA_r} dx + \int_0^L \frac{T^2}{GJ} dx \right] \\ & + \left[ \int_0^L \frac{N_{Q_j} * N}{EA} dx + \int_0^L \frac{M_{Q_j} * M}{EI} dx + \int_0^L \frac{V_{Q_j} * V}{GA_c} dx + \int_0^L \frac{T_{Q_j} * T}{GJ} dx \right] \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

A segunda parcela de cada termo representa o trabalho devido à força  $Q_j$  cujo valor é constante enquanto o seu ponto de aplicação se desloca, devido à actuação do sistema de cargas  $F_i$ .

Subtraindo (B.22) a (B.23) obtém-se:

$$Q_j D_j = \int_0^L \frac{N_{Q_j} * N}{EA} dx + \int_0^L \frac{M_{Q_j} * M}{EI} dx + \int_0^L \frac{V_{Q_j} * V}{GA_c} dx + \int_0^L \frac{T_{Q_j} * T}{GJ} dx \quad (\text{B.24})$$

Para calcular a flecha em qualquer ponto e direcção  $j$  devido às forças  $F_i$  divide-se a expressão (B.24) por  $Q_j$  obtendo-se:

$$D_j = \int_0^L \frac{N_{uj} * N}{EA} dx + \int_0^L \frac{M_{uj} * M}{EI} dx + \int_0^L \frac{V_{uj} * V}{GA_c} dx + \int_0^L \frac{T_{uj} * T}{GJ} dx \quad (\text{B.25})$$

com:  $N_{uj} = \frac{N_{Qj}}{Q_j}$ ,  $M_{uj} = \frac{M_{Qj}}{Q_j}$ ,  $V_{uj} = \frac{V_{Qj}}{Q_j}$  e  $T_{uj} = \frac{T_{Qj}}{Q_j}$ , os esforços virtuais

devido a uma carga unitária. Verificamos que a expressão (B.25) é a mesma que a (B.13) e ainda que o único trabalho remanescente é o relativo à força virtual unitária.

### B.3- Teorema do Deslocamento Recíproco ou de Maxwell

É aplicável a estruturas com comportamento elástico linear e quando os deslocamentos são pequenos.

Enunciado: *A flecha em A causada por uma carga em B é igual à flecha em B quando a mesma carga é aplicada em A.*

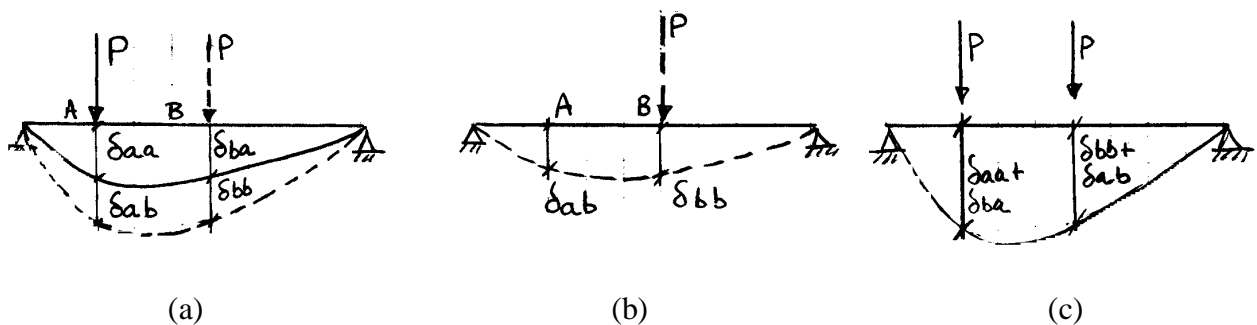


Figura B.10

Numa viga assinalem-se dois pontos A e B. Imagine-se de seguida esta sequência de acontecimentos:

1º.a) É aplicada estaticamente uma carga P em A, observando-se os deslocamentos respectivamente em A e B de valor  $\delta_{aa}$  e  $\delta_{ba}$ , e realiza-se o trabalho armazenado como energia de deformação, U:

$$U = \frac{1}{2} P * \delta_{aa}$$

1º.b) É agora acrescentada uma carga em B de valor P. Os aumentos de flecha respectivamente em A e B devidos à acção isolada desta nova carga P são  $\delta_{ba}$  e  $\delta_{bb}$ . Há um aumento de energia interna que é:

$$U = P * \delta_{ab} + \frac{1}{2} P * \delta_{bb}$$

sendo a 1ª parcela devido à carga P que actua em A ao deslocar-se agora  $\delta_{ab}$  e a segunda devido à carga P (nova carga) que actua em B, responsável pelo acréscimo de deformações na viga.

A energia total acumulada será a soma: 
$$U = \frac{1}{2} P^* \delta_{aa} + P^* \delta_{ab} + \frac{1}{2} P^* \delta_{bb} \tag{B.26}$$

2º) Vamos supor que as duas cargas P são aplicadas em A e B estaticamente e em simultâneo. A flecha total sob A será  $\delta_{aa} + \delta_{ab}$  e em B será  $\delta_{bb} + \delta_{ba}$ . A energia interna total é:

$$U = \frac{1}{2} P^* (\delta_{aa} + \delta_{ab}) + \frac{1}{2} P^* (\delta_{ba} + \delta_{bb}) \tag{B.27}$$

Igualando (B.26) a (B.27) obtemos o seguinte resultado (B.28) que demonstra o teorema.

$$\boxed{\delta_{ab} = \delta_{ba}} \tag{B.28}$$

**B.4- Teorema do Trabalho Recíproco ou de Betty**

É uma generalização do teorema o anterior sendo aplicável a estruturas com comportamento elástico linear com pequenos deslocamentos (análise de 1ª ordem).

Imagine-se um corpo elástico no qual se identificam dois conjuntos de cargas  $P_1, P_2, \dots, P_n$  e  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ . As cargas  $P_i$  causam deslocamentos na direcção de  $P_i$  designados por  $\delta_{P_i}$  e na direcção de  $Q_j$  designados por  $\delta'_{Q_j}$ . por outro lado as cargas  $Q_j$  causam deslocamentos na direcção de  $P_i$  designados por  $\delta'_{P_i}$  e na direcção de  $Q_j$  designados por  $\delta'_{Q_j}$ .

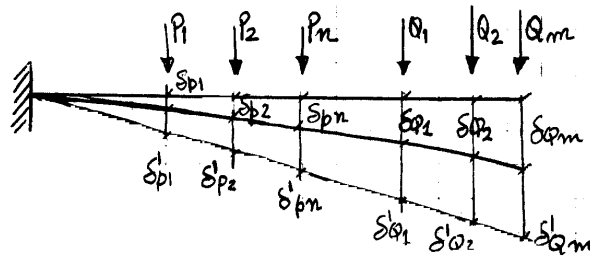


Figura B.11

Vamos aplicar estes conjuntos de cargas na mesma sequência que na secção B.3.

1ºa) Aplicamos o sistema de carga  $P_i$ . A energia de deformação é:

$$U_a = \frac{1}{2} P_1 \delta_{P1} + \dots + \frac{1}{2} P_n \delta_{Pn}$$

1ºb) Acrescentamos o segundo sistema de cargas  $Q_j$ . A energia de deformação é:

$$U_b = P_1 \delta'_{P1} + \dots + P_n \delta'_{Pn} + \frac{1}{2} Q_1 \delta'_{Q1} + \dots + \frac{1}{2} Q_m \delta'_{Qm}$$

A energia total é

$$U = U_a + U_b \tag{B.29}$$

2º) Aplicamos agora os dois sistemas em simultâneo. A energia total de deformação é:

$$U = \frac{1}{2} P_1 (\delta_{P1} + \delta'_{P1}) + \dots + \frac{1}{2} P_n (\delta_{Pn} + \delta'_{Pn}) + \frac{1}{2} Q_1 (\delta_{Q1} + \delta'_{Q1}) + \dots + \frac{1}{2} Q_m (\delta_{Qm} + \delta'_{Qm}) \quad (B.30)$$

Igualando as energias obtemos:

$$P_1 \delta'_{P1} + \dots + P_n \delta'_{Pn} = Q_1 \delta_{Q1} + \dots + Q_m \delta_{Qm}$$

$$\boxed{\sum_i^n P_i \delta'_{P_i} = \sum_j^m Q_j \delta_{Q_j}} \quad (B.31)$$

Podendo-se enunciar o Teorema do Trabalho Recíproco:

*O trabalho realizado pelas forças no primeiro estado de carregamento, quando elas se movem ao longo dos deslocamentos do segundo estado de carregamento, é igual ao trabalho que seria realizado pelas forças no segundo estado de carregamento, quando elas se movem ao longo dos deslocamentos correspondentes ao primeiro estado de carregamento.*

---

Bibliografia:

- [1]- Portela, Artur; Silva, Arlindo, "Mecânica dos Materiais", Plátano Edições Técnicas, 1996
- [2]- Ghali, A.; Neville, A.M., "Structural Analysis - A Unified Classical and Matrix Approach", Ed. London and Hall Ltd., 2ª Edição, 2003
- [3]- Timoshenko, Stephen; Gere, James E., "Mecânica dos Sólidos" , Volume 1, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., tradução, 1984.
- [4]- Freitas, J. Teixeira de, "Análise de Estruturas I", A.E.I.S.T.
- [5]- Freitas, J. Teixeira de; Martins, C.A., "Caderno 70", A.E.I.S.T.
- [6]- R.S.A.
- [7]- Tavares, Segadães, "Análise Matricial de Estruturas", Curso 129 LNEC, 1973.
- [8]- Paduart, A.; Kestens, Jean; Warzee, Guy, "Calcul des Structures Hyperstatiques",
- [9]- Beer P.B.; Johnston, Jr. J., "Resistência dos Materiais", Makron Books do Brasil Editora Ld, Editor McGraw Hill Ltda, 3ª Edição, 1996