2012 ENCONTRO NACIONAL SPM

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

9, 10 e 11 de JULHO, UNIVERSIDADE DO ALGARVE

Representação proporcional – um problema de otimização inteira

Susana Fernandes

FCT - Universidade do Algarve

ORGANIZAÇÃO

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE DO ALGARVE

Delineamento da apresentação

- O problema da representação proporcional
- Resolução clássica – Métodos de divisores modificados
- Como medir a proporcionalidade de uma solução?
  - Como é medida pelos métodos clássicos?

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

O problema da representação proporcional

- Nos Estados Unidos da América cada estado recebe um número de lugares no parlamento - “house of representatives” – proporcional à sua população, segundo o último censo realizado.

- Em inúmeros países da Europa, Portugal incluído, numa eleição cada lista eleitoral recebe um número de mandatos no parlamento proporcional ao número de votos obtidos nas eleições.

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

O problema da representação proporcional

- ***V*** – nº de votos válidos de uma eleição
- ***N*** – nº de listas eleitorais
- $\boldsymbol{v_i}$ – nº de votos na lista eleitoral *i*
- ***M*** – nº total de mandatos a distribuir pelas listas
- $\boldsymbol{m_i}$ – nº de mandatos a atribuir a cada lista eleitoral *i*

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

O problema da representação proporcional

- v_i/V – proporção de votos na lista eleitoral *i*
- $q_i = M \times v_i/V$ – quota de mandatos da lista *i* no parlamento
- $D = V/M$ – divisor – nº de eleitores representados por mandato
- M/V – proporção de mandatos por eleitor (representação per capita)

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

O problema da representação proporcional

- Formulação:

objectivo distribuir os m_i de acordo com as $q_i = M \times {}^{v_i}\!/_{V}$

s. a: $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$

$m_i \in Z_0^+, i = 1,\ldots, N$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

O problema da representação proporcional

- Exemplo: M=26; N=5

Listas eleitorais	A	B	C	D	E	total
votos	9061	7179	5259	3319	1182	26000
quotas	9.061	7.179	5.259	3.319	1.182	26
quotas arredondadas	9	7	5	3	1	25

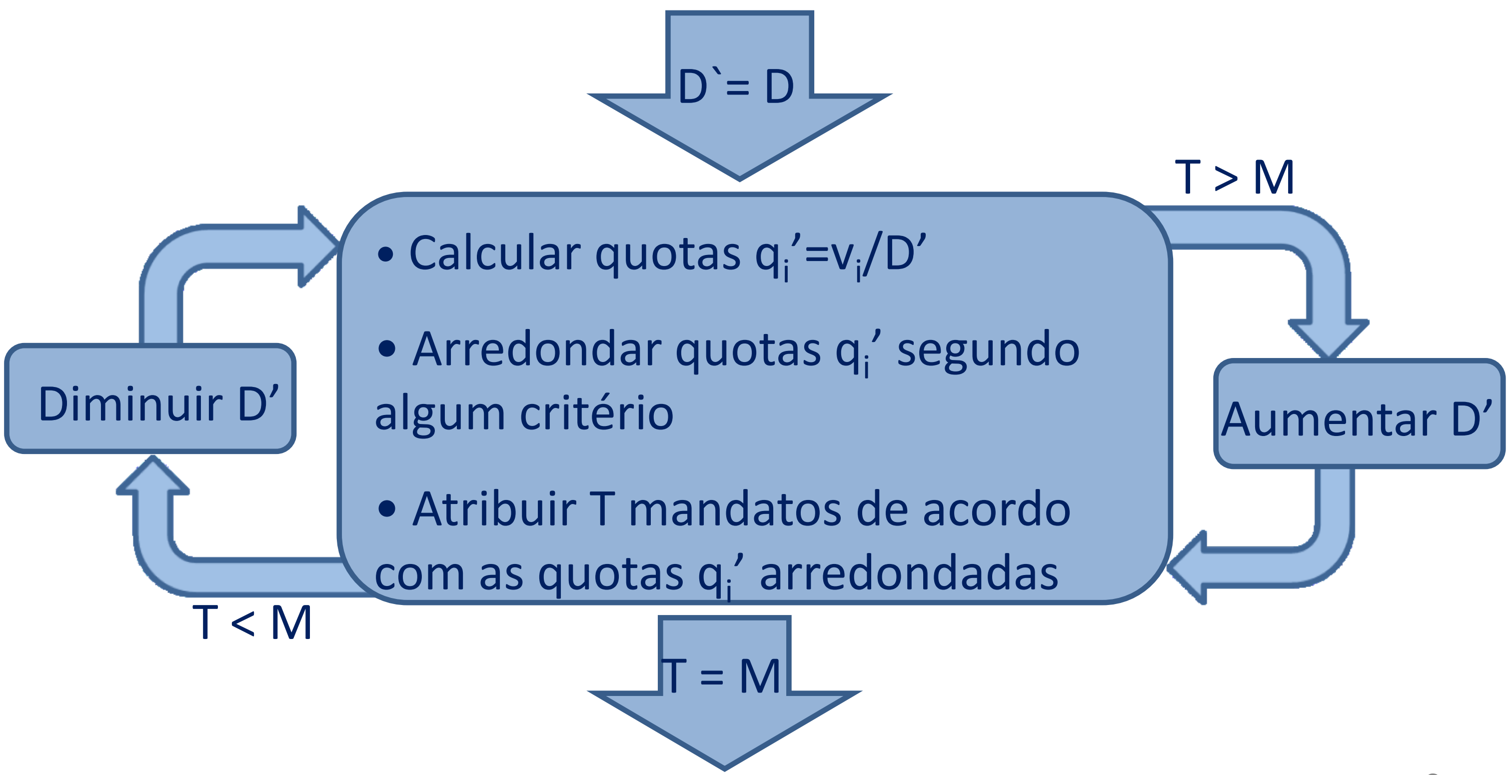
adaptado de [2]

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Resolução clássica – Métodos de divisores modificados

- Jefferson (1792) ≈ D'Hondt (1878)
- Adams (1832)
- Dean (1832)
- Webster (1832) ≈ Sainte–Laguë (1910)
- Huntington – Hill (1911)

Resolução clássica EUA – Métodos de divisores modificados



Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Resolução clássica EUA – Métodos de divisores modificados

- $d(q_i')$ – ponto de arredondamento de q'_i

$$\lfloor q_i' \rfloor \leq d(q_i') \leq \lceil q_i' \rceil$$

- Se $q_i' < d(q_i')$ então $m_i = \lfloor q_i' \rfloor$
- Se $q_i' > d(q_i')$ então $m_i = \lceil q_i' \rceil$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Resolução clássica EUA – Métodos de divisores modificados

Métodos de divisores	Pontos de arredondamento $d(q_i')$	$q_i' < d(q_i') \Rightarrow m_i = \lfloor q_i' \rfloor$
Adams	$\lfloor q'_i \rfloor$	por excesso
Dean	$\dfrac{2\lfloor q'_i \rfloor \lceil q'_i \rceil}{\lfloor q'_i \rfloor + \lceil q'_i \rceil}$	média harmónica
Huntington-Hill	$\sqrt{\lfloor q'_i \rfloor \lceil q'_i \rceil}$	média geométrica
Webster	$\dfrac{\lfloor q'_i \rfloor + \lceil q'_i \rceil}{2}$	média aritmética
Jefferson	$\lceil q'_i \rceil$	por defeito

Resolução clássica Europa – Métodos de divisores modificados

(i) $m_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N$

(ii) Repetir até que $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$

Seja k tal que $$\frac{v_k}{d(m_k)} = \max \frac{v_i}{d(m_i)}$$

Fazer $m_k = m_k + 1$ e $m_i = m_i \quad \forall i \neq k$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Resolução clássica Europa – Métodos de divisores modificados

Métodos de divisores modificados	Divisores $d(m_i)$ $m_i=0,\ldots,M-1$	Sequência de divisores
Adams	m_i	$0, 1, 2, 3,\ldots$
Dean	$\dfrac{2m_i(m_i+1)}{m_i+(m_i+1)}$	$0, \frac{4}{3}, \frac{12}{5}, \frac{24}{7},\ldots$
Huntington-Hill	$\sqrt{m_i(m_i+1)}$	$0, \sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12},\ldots$
Webster ≈ Sainte-Laguë	$m_i + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2},\ldots$
Jefferson ≈ D'Hondt	$m_i + 1$	$1, 2, 3, 4,\ldots$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Resolução clássica Europa – Métodos de divisores modificados

Métodos de divisores modificados	Divisores $d(m_i)$ m_i=0,…,M-1	Sequência de divisores
Adams	m_i	$0, 1, 2, 3,\ldots$
Dean	$\dfrac{2m_i(m_i+1)}{m_i+(m_i+1)}$	$0, \frac{4}{3}, \frac{12}{5}, \frac{24}{7},\ldots$
Huntington-Hill	$\sqrt{m_i(m_i+1)}$	$0, \sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12},\ldots$
Webster ≈ Sainte-Laguë	$m_i + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2},\ldots$
Jefferson ≈ D'Hondt	$m_i + 1$	$1, 2, 3, 4,\ldots$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	9061	7179	5259	3319	1182
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	0	0	0	0	0

$\Sigma m_i = 0$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	**9061**	7179	5259	3319	1182
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	0	0	0	0

$\Sigma m_i = 1$

ndes
sfer@ualg.pt

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	**9061**	7179	5259	3319	1182
2	4530.5				
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	0	0	0	0

$\Sigma m_i = 1$

ndes
sfer@ualg.pt

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	**9061**	**7179**	5259	3319	1182
2	4530.5				
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	1	0	0	0

$\Sigma m_i = 2$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	**9061**	**7179**	5259	3319	1182
2	4530.5	3589.5			
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	1	0	0	0

$\Sigma m_i = 2$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	**9061**	**7179**	**5259**	3319	1182
2	4530.5	3589.5			
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	1	1	0	0

$\sum m_i = 3$

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	**9061**	**7179**	**5259**	3319	1182
2	4530.5	3589.5	2629.5		
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
m_i	1	1	1	0	0

$\Sigma m_i = 3$

ndes
sfer@ualg.pt

Método de D'Hondt

Divisor	A	B	C	D	E
1	**9061**	**7179**	**5259**	**3319**	**1182**
2	**4530.5**	**3589.5**	**2629.5**	**1659.5**	591
3	**3020.(3)**	**2393**	**1753**	**1106.(3)**	
4	**2265.25**	**1794.75**	**1314.75**	829.75	
5	**1812.2**	**1435.8**	**1051.8**		
6	**1510.1(6)**	**1196.5**	876.5		
7	**1294.429**	**1025.571**			
8	**1132.625**	897.375			
9	**1006.(7)**				
10	**906.1**				
m_i	10	7	5	3	1

$\Sigma m_i = 26$

...ndes
sfer@ualg.pt

Resolução clássica – Métodos de divisores modificados

Método	A	B	C	D	E
Adams	9	7	5	3	2
Dean	9	7	5	4	1
Huntington-Hill	9	7	6	3	1
Webster ≈ Sainte-Laguë	9	8	5	3	1
Jefferson ≈ D´Hondt	10	7	5	3	1

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Questão equacionada em 1911 por Hill e trabalhada por Huntington (1921, 1928)

- Huntington utiliza uma abordagem de comparações de medidas entre pares de listas eleitorais

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Centrando a questão no eleitor, será desejável que a representação per capita seja, para todas as listas, o mais próximo possível de *M/V*
- O que pode ser traduzido por

$$\min \sum_{i=1}^{N} v_i \left(\frac{m_i}{v_i} - \frac{M}{V} \right)^2$$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

$$\sum_{i=1}^{N} v_i \left(\frac{m_i}{v_i} - \frac{M}{V} \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i^2}{v_i} - 2\frac{M}{V}\sum_{i=1}^{N} m_i + \frac{M^2}{V^2}\sum_{i=1}^{N} v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i^2}{v_i} - \frac{M^2}{V}$$

$$\min \sum_{i=1}^{N} v_i \left(\frac{m_i}{v_i} - \frac{M}{V} \right)^2 \Leftrightarrow \min \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i^2}{v_i}$$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Dada uma solução ótima $\left(m_1, m_2, \cdots, m_N\right)$ para

$$\min \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i^2}{v_i}$$

uma transferência de mandatos de qualquer lista *i* para outra lista *j* não poderá melhorar a função objectivo

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

$$\frac{(m_i-1)^2}{v_i}+\frac{(m_j+1)^2}{v_j}\geq\frac{m_i^2}{v_i}+\frac{m_j^2}{v_j}\Leftrightarrow\frac{(m_j+1)^2-m_j^2}{v_j}\geq\frac{m_i^2-(m_i-1)^2}{v_i}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2m_j+1}{v_j}\geq\frac{2m_i-1}{v_i}\Leftrightarrow\frac{v_i}{m_i-{}^1\!/_2}\geq\frac{v_j}{m_j+{}^1\!/_2}$$

logo $\min_i \dfrac{v_i}{m_i-{}^1\!/_2}\geq\max_j \dfrac{v_j}{m_j+{}^1\!/_2}$ Método de Webster

(demonstrações: idêntica em [Balinski 2001], com abordagem diferente em [Huntington 1928])

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Método de Webster (Sainte-Laguë)

$$\min \sum_{i=1}^{N} v_i \left(\frac{m_i}{v_i} - \frac{M}{V} \right)^2$$

s. a:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = M$$

$$m_i \in Z_0^+, i = 1, \ldots, N$$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Pensando na representatividade de cada mandato, será desejável que, para todas as listas, ela seja o mais próximo possível de *V/M*
- O que pode ser traduzido por

$$\min \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{v_i}{m_i} - \frac{V}{M} \right)^2$$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

$$\min \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{v_i}{m_i} - \frac{V}{M} \right)^2 \Leftrightarrow \min \sum_{i=1}^{N} \frac{v_i^2}{m_i}$$

- De forma análoga se mostra que o método de Huntington-Hill produz a solução que otimiza esta função objectivo

(demonstrações: idêntica em [Lucas 1978], com abordagem diferente em [Huntington 1928])

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Método de Huntington-Hill

$$\min \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{v_i}{m_i} - \frac{V}{M} \right)^2$$

s. a:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = M$$

$$m_i \in \mathrm{Z}_0^+, i = 1, \ldots, N$$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Outra abordagem será a de minimizar o número de votos por mandato da lista mais desfavorecida
- O que pode ser traduzido por

$$\min \max \frac{v_i}{m_i}$$

- O método de Adams produz a solução ótima para esta função objectivo

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Seja $(m_1, m_2, \cdots, m_N)$ a solução construída com o método de Adams que otimiza $\min \max \frac{v_i}{m_i}$

- Suponhamos, por absurdo, que existe outra solução $(m'_1, m'_2, \cdots, m'_N)$ tal que

$$\frac{v_i}{m'_i} = \max_l \frac{v_l}{m'_l} < \max_l \frac{v_l}{m_l} = \frac{v_j}{m_j}$$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

$$\frac{v_i}{m'_i} = \max_l \frac{v_l}{m'_l} < \max_l \frac{v_l}{m_l} = \frac{v_j}{m_j}$$

$$\left(\frac{v_j}{m'_j} <\right) \frac{v_i}{m'_i} < \frac{v_j}{m_j} \Rightarrow m'_j > m_j \Rightarrow \exists k : m'_k < m_k \Rightarrow \frac{v_k}{m'_k} > \frac{v_k}{m_k}$$

E então numa iteração anterior à última ocorreu

$$\frac{v_k}{m'_k} > \max_l \frac{v_l}{m_l}$$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

E como o $\max_l \frac{v_l}{m_l}$ é decrescente de iteração para iteração

$$\frac{v_k}{m'_k} > \frac{v_j}{m_j}\left(> \frac{v_i}{m'_i}\right)$$

o que contradiz a hipótese de $\frac{v_i}{m'_i} = \max_l \frac{v_l}{m'_l}$

(demonstração idêntica em [Edelman 2005]

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Método de Adams

$$\min \max \frac{v_i}{m_i}$$

s. a:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = M$$

$$m_i \in Z_0^+, i = 1,\ldots, N$$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Forma paralela à anterior será minimizar a representação per capita da lista mais favorecida
- O que pode ser traduzido por

$$\min \max \frac{m_i}{v_i}$$

- O método de Jefferson (D'Hondt) produz a solução ótima para esta função objectivo

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Método de Jefferson (D'Hondt)

$$\min \max \frac{m_i}{v_i}$$

s. a:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = M$$

$$m_i \in \mathbb{Z}_0^+, i = 1, \ldots, N$$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

- Note-se que:

$$\min \max \frac{m_i}{v_i}$$

s.a: $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$

$$m_i \in \mathbb{Z}_0^+, i = 1,\ldots,N$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\min y$$

s.a: $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$

$$m_i \in \mathbb{Z}_0^+, i = 1,\ldots,N$$

$$\frac{m_i}{v_i} \le y, i = 1,\ldots,N$$

$$y \ge 0$$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Como medir a proporcionalidade de uma solução?

Método	Otimiza:
Adams	$\min \max \dfrac{v_i}{m_i}$
Huntington-Hill	$\min \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dfrac{v_i}{m_i} - \dfrac{V}{M} \right)^2$
Webster ≈ Sainte-Laguë	$\min \sum_{i=1}^{N} v_i \left(\dfrac{m_i}{v_i} - \dfrac{M}{V} \right)^2$
Jefferson ≈ D´Hondt	$\min \max \dfrac{m_i}{v_i}$

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt

Referências

[1] Balinski, M. , Young, H. P. (2001), “Fair representation: meeting the ideal of one man, one vote”, 2ª edição, Brookings Institution Press, Washinton D. C. (primeira edição em 1982)

[2] Beumer, M. (2010), “Apportionment in theory and practice”, tese de mestrado, Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam

[3] Edelman, P. (2005),”Minimum total deviation apportionments”, em Simeone, B. e Pukelsheim, F. editores, *Mathematics and democracy-recent advances in voting systems and collective choice*, pp. 55-64, Springer

[4] Huntington, E. (1928), “The apportionment of representatives in congress”, *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 30,pp. 85-110

[5] Lucas, W. (1978), “The apportionment problem”, em Brams, S., Lucas, W., Straffín Jr., P. Editores, *Political and related models*, pp. 358-396, Springer, Berlim

Susana Fernandes
sfer@ualg.pt